

Skript - Akustik, Hören und Musik

Autor: Norbert Marxer

Erstellung: 23.09.2025 (Version 1)

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis		1
Übersicht		4
Gebiete der Akustik		4
Akustik		4
Hören		6
Musik		6
Anhang		6
Akustik		8
Grundlagen		8
Schallwellen sind Longitudinalwellen		8
Schwingung (Repetition)		8
Welle (Repetition)		8
Frequenzbereiche		9
Schallmessung		10
Wichtige Grössen (Repetition)		10
Schallfeldgrössen		10
Schallausbreitung und Doppler Effekt		15
Schallgeschwindigkeit in Luft		15
Richtung und Richtungsänderung		15
Doppler-Effekt		16
Überlagerung von Schallwellen		20
Schallmauer	$v_S = c$	20
Mach'scher Kegel, Überschallknall	$v_S > c$	20
Noise cancelling		21
UKW und AM		21
Schallquellen		23
Übersicht		23
Schwingende Saiten		26
Schwingende Luftsäulen		28
Schwingende Körper		30
Geräusche		33

Hören	35
Das menschliche Ohr	35
Aufbau des menschlichen Ohrs	35
Funktionsweise des menschlichen Ohrs	35
Lautstärke	37
Einleitung	37
Hörfläche und Lautstärkepegel (in phon)	37
Lautheit (in sone)	39
Schalldruckpegel und Schalldruck diverser Schallquellen	41
Bewerteter Schallpegel	41
Akustische Täuschungen	42
Gesetze + Verordnungen zum Lärm	43
Musik	44
Einleitung	44
Fünfton-Skala (griech. Pentatonik)	44
Siebenton-Skala (griech. Heptatonik)	44
Zwölfton-Skala	45
Andere	45
Gleichmässig temperierte chromatische Stimmung und Klaviertasten	46
Pentatonik in pythagoräischer Stimmung	48
Reine Stimmung	49
Tonleiter (7 Töne)	49
Reine chromatische Stimmung	51
Akkord	52
Normstimmton	52
Notenbild	52
Bedeutung verschiedener Symbole	52
Frequenzbereich verschiedener Instrumente	54
Intervalle in Cents	54
Stimmen der Orchesterinstrumente	55

Anhang		56
Anhang A	Quellen	57
Anhang B	Experimente und (Musik)Geräte	59
	Slinky	59
	Doppler-Effekt	59
	phyphox Experimente im Bereich Akustik	60
	Schwingende Körper	61
	Elektroinstrumente	62
	Saiteninstrumente	63
	Blasinstrumente	68
	Diverse Musikinstrumente	70
Anhang C	phyphox Experimente	71
Anhang D	Mathematik: Fourier Transformation	73
	Einleitung	73
	Historische Entwicklung der Fourier Transformation	73
	Anwendungen	74
	Unterschiedliche Konventionen bei der Fourier-Transformation	75
	Reelle und komplexe Fourier Transformation	76
	Übersicht von Fourier-Transformationen	76
	Kontinuierliche Fourier-Transformation	77
	Kontinuierliche Fourier-Transformation (periodisch)	77
	Diskrete Fourier-Transformation: DTFT	82
	Diskrete Fourier-Transformation (periodisch): DFT, FFT	82
	Weitere Funktionen zur Analyse von Signalen	83
Anhang E	Mathematik - Autokovarianz und Autokorrelation	84
	Autokovarianz	84
	Details	84
Anhang F	Musik	87
	Musikgeschichte	87
	Wichtige Begriffe	88
	Tonleitern / Skalen	89
Anhang G	KI und Theorie der Gitarre	91

Übersicht

Gebiete der Akustik

Die Akustik beinhaltet viele verschiedene Aspekte. Im Folgenden ist eine kurze Übersicht gegeben.

Fundamentale Konzepte

- Welleneigenschaften: Diskussion der wesentlichen Eigenschaften wie Frequenz, Wellenlänge, Amplitude, Intensität, akustische Impedanz.
- Wellenausbreitung: Wie sich Schallwellen in verschiedenen Medien (Gas, Flüssigkeit, Festkörper) und an Übergängen ausbreiten.
- Schallmessung: Diskussion der Begriffe Schalldruck, Schallintensität, Leistung und Dezibel Skala.
- Wellengleichung: Lösen der Wellendifferentialgleichung in verschiedenen Situationen.
- Frequenzanalyse: Untersuchung wie Schallwellen in Frequenzen aufgelöst werden.

Menschliches Hören

- Das menschliche Ohr: Untersuchung der Struktur und der Funktion des Ohrs.
- Psychoakustik: Untersuchung, wie die Menschen Schall wahrnehmen, insbesondere Lautstärke und Tonhöhe.
- Hörprobleme: Einfluss des Lärms und des Alters.

Anwendungen

- Architektur: Planen von Räumen mit optimaler Schallqualität (Konzerthallen, Klassenzimmer).
- Umwelt: Untersuchung von Lärm und dessen Einfluss auf die Umgebung.
- Musik: Untersuchung der Physik von Musikinstrumenten und Schallproduktion.
- Ingenieur: Entwicklung von optimalen Mikrofonen und Lautsprechern.
- Biomedizin: Anwendungen von Ultraschalluntersuchungen in der Medizin.

In diesem (kurzen) Skript können wir natürlich nicht auf alle diese Aspekte in der gebührenden Tiefe eingehen. Wir konzentrieren uns auf die folgenden Gebiete ...

- Akustik allgemein,
- Aufbau und Funktionsweise des menschlichen Ohrs,
- Musik.

Akustik

Der Abschnitt ist sowohl ein Ausblick als auch eine Zusammenfassung. Die Bedeutung der Buchstaben/Symbole steht in den entsprechenden Abschnitten.

Im Abschnitt "Grundlagen" behandeln wir zunächst die Grundlagen der Akustik. Da **Schallwellen** mechanische Longitudinalwellen sind, repetieren wir kurz die mathematische Beschreibung von mechanischen Schwingungen ...

$$y[t] = \hat{y} \sin[\omega t + \varphi_0] \qquad \omega = 2 \pi f = \frac{2\pi}{T}$$

die Ausgangspunkt von mechanischen Wellen sind ...

$$y[x, t] = \hat{y} \sin[k x - \omega t + \varphi_0] \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \omega = 2 \pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Schallwellen werden gemäss ihren Frequenzen in die folgenden Kategorien eingeteilt (zirka) ...

Infraschall	< 20 Hz
Hörbereich	20 Hz – 20 000 Hz
Ultraschall	> 20 kHz

Anschliessend behandeln wir im Abschnitt “Schallmessung” nach einer Repetition der Formeln aus dem Skript “Mechanische Wellen” für die Grössen Energiedichte, Energie, Leistung, Intensität und Wellenwiderstand einer mechanischen Welle die neuen Grössen bzw. neuen Namen für die Grössen ...

Schallschnelle	$v[t] = \hat{v} \cos[\omega t + \varphi_0]$
Schalldruck	$p[t] = \rho c v[t]$
spez. Schallimpedanz	$Z_a = \rho c = \frac{\hat{p}}{\hat{v}}$
Effektivwert	$\hat{v} = \sqrt{2} v_{\text{eff}}$
Schallintensität	$J = \rho c \tilde{v}^2 = \tilde{v} \tilde{p} = \frac{\tilde{p}^2}{\rho c}$

Da die Intensitäten, die das menschliche Ohr von der Hörgrenze bis zur Schmerzgrenze wahrnehmen kann, viele Zehnerpotenzen umfassen (von $10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ bis $10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$), wurden mit Hilfe des Logarithmus der

Schallintensitätspegel L_J und der **Schalldruckpegel** L_p definiert ...

$$L_J = 10 * \log_{10} \left[\frac{J}{J_0} \right] \text{ dB}$$

$$L_p = 20 * \log_{10} \left[\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_0} \right] \text{ dB}$$

wobei dB (**Dezibel**) die Einheit 1 hat und nur andeuten soll, dass es sich bei der physikalischen Grösse um den Logarithmus eines Verhältnisses handeln soll. Der grosse Intensitätsbereich wurde so auf den Bereich von 0 dB bis 130 dB für die Schallpegel eingeschränkt.

Anschliessend besprechen wir noch, wie der Schallpegel von **mehreren Quellen** berechnet werden kann. Es ist nicht nur eine einfache Addition!

Wenn ausbreitende Wellen auf einen Übergang treffen, können sie reflektiert, gebrochen und/oder gebeugt werden. Auf Grund der Beugungserscheinung können wir um Ecken herum hören. Die Beugung ist in der Akustik wichtig, da die Hindernisse in der Grössenordnung der Wellenlänge sind. Wir können jedoch nicht um Ecken herum sehen, da die Wellenlänge des Lichts viel kleiner ist als die Hindernisse, die im täglichen Leben bedeutsam sind.

Dann untersuchen wir den in der Physik überaus wichtigen **Doppler-Effekt**: die Tatsache, dass je nach Bewegung des Senders und des Empfängers gegenüber dem Medium (Luft) sich die Frequenz des gesendeten und die Frequenz des empfangenen Signals unterscheiden ...

$$f_E = \frac{c - v_E}{c - v_S} f_S$$

Die Superposition von Schallwellen führt auch zu zwei weiteren interessanten Effekten: der **Schallmauer**, wenn sich die Geschwindigkeit eines Körpers der Schallgeschwindigkeit nähert, und dem **Überschallknall** und dem **Mach'schen Kegel**, wenn sich ein Körper schneller als die Schallgeschwindigkeit bewegt.

Zwei wichtige Anwendungen für Superpositionen sind weiters: die **Noise-Canceling-Technologie** (Erzeugung von Schallwellen, die den störenden Lärm auslöschen) und die Übertragung von Sprache mittels Radiowellen (**UKW** oder **AM**). Eine weitere Anwendung der Superposition ist die **Schwebung**. Ihre Anwendung wird im Anhang B zum Stimmen der Gitarre diskutiert.

Der letzte Abschnitt behandelt diverse Schallquellen: **Schwingende Saiten/Luftsäulen/Körper** sowie allgemeine **Geräusche**. Hier wird insbesondere auf die relevante Physik eingegangen. Viele Beispiele werden wir dann im Abschnitt “Musik” wieder antreffen.

Hören

In diesem Kapitel besprechen wir die Funktionsweise und die Eigenschaften des menschlichen Hörens. Das Ohr ist ein phänomenales Organ, das in der Lage ist, Schalldrücke zu detektieren, die viele Grössenordnungen unter dem Umgebungs(luft)druck liegen.

Wir besprechen zunächst kurz den **Aufbau des Ohrs** mit äusserem Ohr, Mittelohr und innerem Ohr und diskutieren die **Funktionsweise**, wie die einzelnen Teile in der Lage sind, die relevanten Informationen aus der auf das Ohr auftreffenden Schallwelle herauszufiltern.

Im Kapitel “Akustik” haben wir objektive physikalische Grössen kennengelernt, wie die Stärke von Schallwellen charakterisiert werden kann (Schallintensität in Watt, Schalldruck in Pascal, Schallpegel in Dezibel). Da das menschliche Ohr einen eingeschränkten Hörbereich hat, d.h. nur Schallwellen im Frequenzbereich von zirka 20 Hz bis 20 kHz hört, und nicht alle Frequenzen als gleich laut wahrnimmt, ist der Schallpegel kein gutes Mass für das Lautstärkeempfinden. Deshalb wird der Dezibel-Wert mit Hilfe der “Kurven gleicher Lautstärke” korrigiert und es resultiert der **Lautstärkepegel** mit der Einheit **phon**. Dies entspricht zwar dem Lautstärkeempfinden für verschiedene Frequenzen, jedoch nicht dem für unterschiedliche Intensitäten (was beispielsweise als doppelt so laut empfunden wird). Ein besseres Mass für das Lautstärkeempfinden liefert dann eine weitere Umrechnung, die zur Grösse **Lautheit**, die in der Einheit **sones** ausgedrückt wird, führt.

Nicht alle Schallwellen werden von allen Menschen als gleich angenehm bzw. unangenehm empfunden. Gesetze und Verordnungen regeln die Tätigkeiten, die übermässigen Lärm erzeugen. Als Messgrössen werden die besprochenen physikalischen Grössen wie Lautstärkepegel usw. verwendet.

Musik

Die Musik ist ein faszinierendes Gebiet. Viele Aspekte könnten untersucht werden. Wir werden in diesem Abschnitt insbesondere die physikalischen Aspekte der Musik beleuchten.

- Welche Tonleitern wurden im Laufe der Geschichte entwickelt?
- Wie können deren Tonhöhen angegeben werden?
- Wie sind die mathematischen Zusammenhänge?
- Wie werden Musikstücke notiert?
- Welche Probleme ergeben sich beim Zusammenspiel von mehreren Instrumenten?

Anhang

Im Anhang A “**Quellen**” sind die für dieses Skript verwendeten Quellen angegeben. Neben dem “Taschenbuch der Physik” von Horst Kuchling, Internetquellen (v.a. Wikipedia), gelegentlichen Anfragen an die KI (des Mathematica Notebook Assistant) wurde insbesondere das Buch “The Physics of Music and Color: Sound and Light” von Leon Gunther benutzt.

Im Anhang B “**Experimente**” werden durchgeführte und erwähnte Experimente sowie Musikgeräte aufgelistet und mehr oder weniger ausführlich diskutiert.

Im Anhang C “**phyphox Experimente**” wird die smart phone app “phyphox” beschrieben. Mit Hilfe dieser App und den Sensoren des smart phones können physikalische Experimente durchgeführt werden.

Eine wichtige Rolle bei der Analyse von Signalen spielt die Fourier-Transformation. Ausführlich wird sie im Anhang D “**Mathematik - Fourier Transformation**” besprochen. Mit Hilfe der Mathematica Funktionen kann dieser mathematisch anspruchsvollere Teil gut bewältigt werden.

Ein weiterer Mathematik-Teil wird im Anhang E “**Mathematik - Autokorrelation**” diskutiert. Die App “phyphox” verwendet die Autokorrelation, um aus einem Signal das harmonische Signal herauszufiltern.

Im Anhang F “**Musik**” werden noch weitere wichtige Begriffe der Musik aufgegriffen.

Und zuallerletzt wird noch im Anhang G “**KI und Theorie der Gitarre**” eine kurze Diskussion mit der KI in Bezug auf die Physik der Gitarre angegeben: wie man KI sinnvoll einsetzen kann, dass man aber noch vorsichtig mit der Übernahme ihrer Antworten sein sollte.

Akustik

Grundlagen

Schallwellen sind Longitudinalwellen

Wir haben im Skript “Mechanische Wellen” zwischen longitudinalen und transversalen Wellen unterschieden. Die im Rahmen dieses Skripts untersuchten **Schallwellen** sind **Longitudinalwellen**. Sie können sich sowohl in Festkörpern, in Flüssigkeiten und in Gasen ausbreiten. Die meisten Beispiele in diesem Skript beziehen sich auf Schallwellen in Luft.

Da viele Schallwellen näherungsweise harmonische Wellen oder Überlagerungen von harmonischen Wellen sind und grundsätzlich jede Welle via Fourier Transformation in harmonische Wellen zerlegt werden kann, spielen die **harmonischen** (durch Sinus und Cosinus darstellbaren) **Wellen** eine herausragende Rolle.

Schwingung (Repetition)

Vielfach sind harmonische Schwingungen Auslöser von harmonischen Wellen. Wir haben im Skript “Mechanische Schwingungen” gesehen, dass sich die zeitabhängige Auslenkung $y[t]$ einer harmonischen Schwingung folgendermassen darstellen lässt ...

$$y[t] = \hat{y} \sin[\omega t + \varphi_0]$$

In dieser Gleichung kommen die folgenden physikalischen Grössen vor ...

t	Zeit
$y[t]$	zeitabhängige Auslenkung (Strecke, Winkel, Bogenlänge, ...)
$\hat{y}$	maximale Auslenkung, Amplitude
ω	Kreisfrequenz, Bezug zur Periodendauer T und Frequenz f : $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
φ_0	Nullphasenwinkel, Phase (= Argument des Sinus) zur Zeit $t = 0$

Welle (Repetition)

Wie wir im Skript “Mechanische Wellen” gesehen haben, lässt sich eine (eindimensionale in positiver x -Richtung propagierende) harmonische Welle folgendermassen darstellen ...

$$y[x, t] = \hat{y} \sin[kx - \omega t + \varphi_0]$$

In dieser Gleichung kommen die folgenden physikalischen Grössen vor ...

t	Zeit
x	Ort
$y[x, t]$	orts- und zeitabhängige Auslenkung (Strecke, Druck, ...)
$\hat{y}$	maximale Auslenkung, Amplitude
k	Wellenzahl: Bezug zur Wellenlänge λ : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
ω	Kreisfrequenz, Bezug zur Periodendauer T und Frequenz f : $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
φ_0	Nullphasenwinkel, Phase (= Argument des Sinus) für $t = 0$ und $x = 0$

Die Winkelfunktionen Sinus und Cosinus spielen im folgenden bei vielen Überlegungen eine wichtige Rolle.

Frequenzbereiche

Das menschliche Ohr kann nur Frequenzen von zirka 20 Hz bis 20 kHz wahrnehmen. Dies ist der sogenannte **Hörbereich**.

Die Schallwellen werden demzufolge in die folgenden drei Frequenzbereiche eingeteilt (zirka) ...

Infraschall	< 20 Hz
Hörbereich	20 Hz – 20 000 Hz
Ultraschall	> 20 kHz

Quelle: Link und Kuchling (Seite 333).

Manchmal wird noch eine vierte Kategorie aufgeführt (Link) ...

Hyperschall	> 1 GHz
	Kuchling 10 GHz bis 10THz

Mit Hilfe der Formel ($c = \lambda f$) und der Schallgeschwindigkeit in Luft (zirka 340 m/s) können wir auch die entsprechenden Wellenlängen in Luft bestimmen ...

$$\begin{aligned} f = 20 \text{ Hz} & \quad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{340 \text{ m/s}}{20 \text{ Hz}} = 17 \text{ m} \\ f = 20\,000 \text{ Hz} & \quad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{340 \text{ m/s}}{20\,000 \text{ Hz}} = 17 \text{ mm} \end{aligned}$$

Infraschall

Infraschall bezieht sich auf Schallwellen mit Frequenzen unterhalb des menschlichen Hörbereichs, also unter 20 Hz. Menschen können Infraschall zwar nicht hören, aber in hohen Intensitäten kann er körperliche Empfindungen oder Druckempfindungen verursachen. In bestimmten Fällen berichten Menschen, die in der Nähe von Infraschallquellen leben oder arbeiten, von Symptomen wie Kopfschmerzen, Schwindel oder einem allgemeinen Gefühl von Unwohlsein. Diese Effekte sind jedoch individuell und hängen von der Intensität und Dauer der Infraschallbelastung ab.

Diese niederfrequenten Schallwellen können von natürlichen Quellen wie Erdbeben, Vulkanausbrüchen und Meereswellen sowie von künstlichen Quellen wie Maschinen, Explosionen und Infrastrukturprojekten wie Windkraftanlagen erzeugt werden.

Besonders Infraschallwellen sehr tiefer Frequenz breiten sich gut über grosse Entfernungen aus. Im Wasser haben Infraschallwellen eine besonders hohe Reichweite.

Manche Tiere wie etwa Elefanten, Giraffen und Blauwale können Schall in einem Teil dieses Frequenzspektrums wahrnehmen und nutzen diese Laute wahrscheinlich auch zur Kommunikation und zur Orientierung.

Hörbereich

Eine ausführliche Diskussion findet im Kapitel "Hören" statt.

Ultraschall

Ultraschallmessung in der Medizin

Schallfrequenzen oberhalb des Hörbereichs werden als **Ultraschall** bezeichnet. Diese Schallwellen haben eine hohe Frequenz und eine kleine Wellenlänge. Gemäss der Formel für die Intensität ...

$$J = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{y}^2 c$$

ergeben hohe Frequenzen eine **hohe Schallintensität** und einen hohen Schalldruck. Dies kann im Inneren eines Körpers von Erwärmung bis zur Strukturveränderung führen.

Auf Grund der kurzen Wellenlänge treten kaum Beugungseffekte auf. Ultraschallwellen können gebündelt werden und diese Strahlen können mathematisch analog zu Lichtstrahlen in der **geometrischen Optik** behandelt werden.

Einige Anwendungen sind: Ultraschallmassage, Ultraschallreinigen, Ultraschalluntersuchungen in der Medizin.

Schallmessung

Wichtige Grössen (Repetition)

Wir haben schon im Skript "Mechanische Wellen" wichtige physikalische Grössen von sich ausbreitenden mechanischen Wellen kennengelernt und erläutert. Dies waren ...

$w = \frac{E}{V} = \frac{1}{2} \rho \hat{v}^2 \stackrel{\hat{v}=\omega \hat{y}}{=} \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{y}^2$	Energiedichte (Energie pro Volumen)
$E = w V = w A c t = \frac{1}{2} \rho \hat{v}^2 A c t = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{y}^2 A c t$	Energie , die in der Zeit t die Fläche A durchströmt
$P = \frac{E}{t} = \frac{1}{2} \rho \hat{v}^2 A c = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{y}^2 A c$	Leistung : Energie pro Zeit, die die Fläche A durchströmt
$J = \frac{P}{A} = \frac{1}{2} \rho \hat{v}^2 c = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{y}^2 c$	Intensität : Energie pro Zeit und Fläche
$Z = \rho c$	Wellenwiderstand

Die Bedeutung der einzelnen Grössen können in jenem Skript nachgelesen werden.

Schallfeldgrössen

Im Zusammenhang mit akustischen Wellen sind auch noch die folgenden Begriffe wichtig ...

- Schallschnelle
- Schalldruck
- Schallintensität
- Schallpegel

Wir werden sie im Folgenden erläutern.

Schallschnelle v

Als **Schallschnelle** v wird die momentane Schwinggeschwindigkeit der Teilchen im Medium bezeichnet. Bei einer harmonischen Longitudinalwelle bewegen sich die einzelnen Teilchen periodisch vorwärts und rückwärts. Die Auslenkung um die Gleichgewichtslage wird beschrieben durch ...

$$y[t] = \hat{y} \sin[\omega t + \varphi_0]$$

und die momentane Geschwindigkeit durch ...

$$v[t] = \hat{v} \cos[\omega t + \varphi_0] \quad \hat{v} = \omega \hat{y}$$

Die **maximale Schallschnelle** ist somit $\hat{v}$.

Im Allgemeinen wird die Schallschnelle nicht gemessen, sondern aus dem Schalldruck berechnet.

Schalldruck p

Als **Schalldruck** p wird die in einer Schallwelle auftretende periodische Druckabweichung (Überdruck, Unterdruck) vom vorhandenen Druck bezeichnet. In Luft ist der Schalldruck p dem vorhandenen Luftdruck überlagert.

Es kann gezeigt werden, dass der momentane Schalldruck proportional zur Geschwindigkeit ist und folgendermassen beschrieben werden kann ...

$$p[t] = \rho c v[t] = \rho c \hat{v} \cos[kx - \omega t + \varphi_0] = \rho c \omega \hat{y} \cos[kx - \omega t + \varphi_0]$$

In der Formulierung ...

$$p[t] = \hat{p} \cos[kx - \omega t + \varphi_0]$$

ist somit der **maximale Schalldruck** gegeben durch ...

$$\hat{p} = \rho c \hat{v} = \rho c \omega \hat{y}$$

Das hier vorkommende Produkt ρc aus Dichte ρ und Wellengeschwindigkeit c wird bei Wellen allgemein mit **Wellenwiderstand** Z bezeichnet. Im Bereich Akustik wird für den gleichen Ausdruck die Bezeichnung **spezifische Schallimpedanz** Z_a verwendet. Es folgt somit ...

$$Z_a = \rho c = \frac{\hat{p}}{\hat{v}}$$

Schallintensität J

Als **Schallintensität** (oder Schallstärke) J wird das Verhältnis zwischen der auf eine Fläche treffenden Schallleistung P zur Grösse dieser Fläche A bezeichnet ...

$$J = \frac{P}{A} \quad [J] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m s}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^3}$$

Wie im Skript "Mechanische Wellen" hergeleitet gilt auch hier ...

$$J = \frac{1}{2} \rho c \hat{v}^2$$

Einsetzen von $\hat{p} = \rho c \hat{v}$ liefert dann die folgenden Beziehungen ...

$$J = \frac{1}{2} \rho c \hat{v}^2 = \frac{1}{2} \hat{v} \hat{p} = \frac{1}{2} \frac{\hat{p}^2}{\rho c}$$

Effektivwerte

Nachdem alles bisher Gesagte mehr oder weniger Repetition gewesen ist, lernen wir nun einen neuen Begriff kennen, den **Effektivwert** eines Signals.

Der **Effektivwert** u_{eff} (engl. root mean square, **RMS**) einer physikalischen Grösse entspricht mathematisch der Wurzel aus dem Mittelwert über das Quadrat von $u[t]$ während einer ganzen Zahl von Perioden. Hier für eine einzige Periodendauer T gezeichnet.

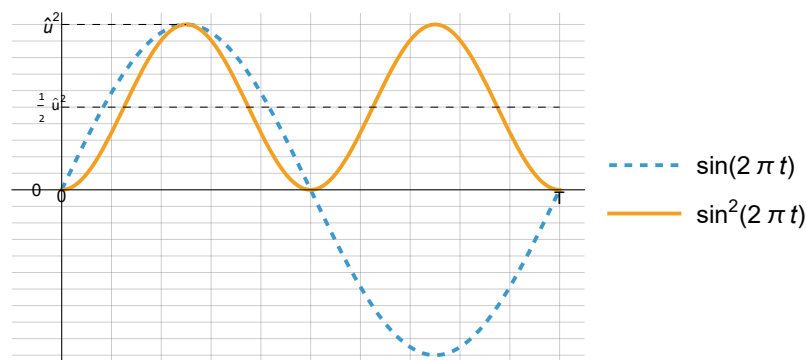


Abbildung Die Signale $u[t]$ und $u[t]^2$ (s.a. Link). Der Durchschnittswert von $u[t]^2$ ist $\frac{1}{2} \hat{u}^2$

$$\text{Also: } u_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2} \hat{u}^2 \rightarrow u_{\text{eff}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

Das heisst mathematisch ...

$$u_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u[t]^2 dt}$$

Für ein sinusförmiges Signal gilt (siehe Abbildung oben) ...

$$u_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (\hat{u} \cos[\omega t])^2 dt} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

Es besteht somit bei sinusförmigen Signalen ein Faktor von $\sqrt{2} = 1.41421$ zwischen dem grösserem Scheitelwert und dem kleineren Effektivwert.

Wir alle kennen dies in Bezug auf die elektrische Spannung im Haus:

$$\begin{array}{ll} \text{Effektivwert } u_{\text{eff}} & (230 \pm 10) \text{ Volt} \\ \text{Scheitelwert } \hat{u} = \sqrt{2} u_{\text{eff}} & \approx 325 \text{ Volt} \end{array}$$

Mehr dazu im Skript "Elektrizitätslehre".

Schallpegel

Mit Hilfe des Effektivwerts ...

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \sqrt{2} v_{\text{eff}} \\ \hat{p} &= \sqrt{2} p_{\text{eff}} \end{aligned}$$

und der Schreibweise $\tilde{v} = v_{\text{eff}}$ und $\tilde{p} = p_{\text{eff}}$ können wir auch schreiben ...

$$J = \rho c \tilde{v}^2 = \tilde{v} \tilde{p} = \frac{\tilde{p}^2}{\rho c}$$

Aus empirischen Untersuchungen wurden Mittelwerte für die Schallintensitäten und Schalldrücke der **Hörschwelle** (gerade noch hörbar) und der **Schmerzgrenze** bestimmt. Sie liegen weit auseinander. Der zwischen ihnen liegende **Hörbereich** erstreckt sich somit über einen sehr grossen Bereich (im nächsten Abschnitt wird dies näher ausgeführt) ...

Hörschwelle	$J_0 = 1 \frac{\text{pW}}{\text{m}^2}$	$p_0 = 20 \mu\text{Pa}$	0 dB
Schmerzgrenze	$J_{\text{SG}} = 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$	$p_{\text{SG}} = 63 \text{ Pa}$	130 dB

Um kleinere Zahlenwerte für die Schallintensitäten und Schalldrücke zu bekommen, wird der sogenannte **Schallpegel** definiert. Schallpegel sind objektiv. Sie lassen die frequenzabhängige Empfindlichkeit des Ohrs unberücksichtigt. Die Frequenzabhängigkeit des menschlichen Ohrs wird im Kapitel "Hören" näher untersucht werden.

Schallintensitätspegel

Der **Schallintensitätspegel** L_J ist der 10-fache Zehnerlogarithmus des Verhältnisses zweier Schallintensitäten J und J_{ref} ...

$$L_J = 10 * \log_{10} \left[\frac{J}{J_{\text{ref}}} \right] \text{ dB}$$

Eigentlich ist der Logarithmus eines Verhältnisses dimensionslos und besitzt keine Einheit. Jedoch fügt man zur Kennzeichnung der Logarithmierung dem Zahlenwert des Logarithmus die Bezeichnung **Dezibel (dB)** bei. Ähnlich wie rad wird dB wie eine Einheit behandelt.

Wenn der Schallpegel auf die Bezugsschallintensität J_0 (dies ist ungefähr die Hörschwelle des menschlichen Ohrs) ...

$$J_{\text{ref}} = J_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{pW}}{\text{m}^2}$$

bezogen wird, spricht man von **absolutem Schallintensitätspegel** ...

$$L_J = 10 * \log_{10} \left[\frac{J}{J_0} \right] \text{ dB} \quad \text{absoluter Schallintensitätspegel}$$

Als **relativen Schallintensitätspegel** ΔL bezeichnet man die Differenz zweier absoluter Schallintensitäten J_1 und J_2 .

$$\begin{aligned}\Delta L &= L_{J_1} - L_{J_2} = 10 * \log_{10} \left[\frac{J_1}{J_0} \right] \text{dB} - 10 * \log_{10} \left[\frac{J_2}{J_0} \right] \text{dB} \\ &= 10 \left(\log_{10} \left[\frac{J_1}{J_0} \right] - \log_{10} \left[\frac{J_2}{J_0} \right] \right) \text{dB}\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Logarithmengesetzes $\log[a] - \log[b] = \log\left[\frac{a}{b}\right]$ folgt ...

$$\begin{aligned}&= 10 \left(\log_{10} \left[\frac{\frac{J_1}{J_0}}{\frac{J_2}{J_0}} \right] \right) \text{dB} = 10 \left(\log_{10} \left[\frac{J_1}{J_2} \right] \right) \text{dB} \\ \Delta L_J &= 10 \log_{10} \left[\frac{J_1}{J_2} \right] \text{dB} \quad \text{relativer Schallintensitätspegel}\end{aligned}$$

Schalldruckpegel

Wir haben oben gesehen, dass die Schallintensität J und das Quadrat des effektiven Schalldrucks $\bar{p}$ proportional zueinander sind ...

$$J = \frac{\bar{p}^2}{\rho c}$$

Wenn wir analog zum Schallintensitätspegel den **absoluten Schalldruckpegel** definieren, erhalten wir ...

$$\begin{aligned}L_p &= 10 * \log_{10} \left[\left(\frac{\bar{p}}{\bar{p}_0} \right)^2 \right] \text{dB} = 20 * \log_{10} \left[\frac{\bar{p}}{\bar{p}_0} \right] \text{dB} \\ \text{denn:} \quad \log[a^2] &= 2 \log[a]\end{aligned}$$

Dabei ist p_0 der sogenannte **Bezugsschalldruck** ...

$$p_0 = 2 * 10^{-5} \text{ Pa} = 20 \mu\text{Pa}$$

Ähnlich zum relativen Schallintensitätspegel können wir auch den **relativen Schalldruckpegel** definieren ...

$$\Delta L_p = 20 \log_{10} \left[\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_2} \right] \text{dB}$$

Die Grössen L_J und L_p sind nicht gleich, da die Proportionalitätskonstante ρc zwischen J und $\bar{p}^2$ vom Medium abhängt. Da p_0 gesetzlich festgelegt wurde, gilt deshalb $J_0 \approx 1 \frac{\text{pW}}{\text{m}^2}$ nur für "normale" Luft (d.h. $\rho c = 400 \frac{\text{Pa s}}{\text{m}}$). Für andere Medien müsste J_0 erst mit $J_0 = \frac{\bar{p}_0^2}{\rho c}$ bestimmt werden.

Schallpegel bei mehreren Quellen

Wir möchten hier noch ein Gefühl für die Dezibel-Angaben entwickeln.

Was ist der totale Schallintensitätspegel $L_{J,\text{tot}}$, wenn n inkohärente Quellen (alle mit dem Schallintensitätspegel L_J) vorkommen? Inkohärent bedeutet, dass bei der Überlagerung nicht die Amplituden, sondern die Intensitäten addiert werden müssen.

Wir müssen die Intensitäten addieren und erhalten (unter Verwendung des Logarithmengesetzes $\log[n * a] = \log[n] + \log[a]$) ...

$$\begin{aligned}L_{J,\text{tot}} &= 10 * \log_{10} \left[\frac{J_1 + J_2 + \dots + J_n}{J_{\text{ref}}} \right] \text{dB} = 10 * \log_{10} \left[\frac{nJ}{J_{\text{ref}}} \right] \text{dB} = 10 * \log_{10} \left[n * \frac{J}{J_{\text{ref}}} \right] \text{dB} = 10 * \left(\log_{10}[n] + \log_{10} \left[\frac{J}{J_{\text{ref}}} \right] \right) \text{dB} \\ &= 10 * \log_{10}[n] \text{dB} + 10 * \log_{10} \left[\frac{J}{J_{\text{ref}}} \right] \text{dB} = L_J + 10 * \log_{10}[n] \text{dB}\end{aligned}$$

Wir sehen, dass sich der Schallintensitätspegel folgendermassen erhöht ...

2 Quellen	$10 \cdot \log_{10}[2] \text{ dB} \approx 3.01 \text{ dB}$	3 dB entspricht doppelter Intensität
3 Quellen	$10 \cdot \log_{10}[3] \text{ dB} \approx 4.77 \text{ dB}$	
5 Quellen	$10 \cdot \log_{10}[5] \text{ dB} \approx 6.99 \text{ dB}$	
10 Quellen	$10 \cdot \log_{10}[10] \text{ dB} = 10.00 \text{ dB}$	10 dB entspricht zehnfacher Intensität
20 Quellen	$10 \cdot \log_{10}[20] \text{ dB} \approx 13.01 \text{ dB}$	

Mit den Schalldrücken können wir auch schreiben ...

$$J_{\text{tot}} = J_1 + J_2 + \dots + J_n = \frac{\tilde{p}_{\text{tot}}^2}{\rho c}$$

$$\tilde{p}_{\text{tot}} = \sqrt{\rho c} \sqrt{J_1 + J_2 + \dots + J_n}$$

$$\tilde{p}_{\text{tot}} = \sqrt{\rho c} \sqrt{\frac{\tilde{p}_1^2}{\rho c} + \frac{\tilde{p}_2^2}{\rho c} + \dots + \frac{\tilde{p}_n^2}{\rho c}}$$

$$\tilde{p}_{\text{tot}} = \sqrt{\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2 + \dots + \tilde{p}_n^2}$$

Dies führt auf die allgemeine Formel mit den Schalldrücken ...

$$L_{p,\text{tot}} = 20 \cdot \log_{10} \left[\frac{\sqrt{\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2 + \dots + \tilde{p}_n^2}}{\tilde{p}_{\text{ref}}} \right] \text{ dB}$$

Bestimmung der Schallintensität und des Schalldrucks aus dem Schallpegel

Wir haben die Formel ...

$$L_J = 10 \cdot \log_{10} \left[\frac{J}{J_0} \right] \text{ dB}$$

Um aus gegebenem L_J die Intensität zu berechnen, gilt ...

$$\log_{10} \left[\frac{J}{J_0} \right] = \frac{L_J}{10 \text{ dB}}$$

$$J = J_0 \cdot 10^{\frac{L_J}{10 \text{ dB}}}$$

Und analog aus dem Schalldruckpegel $L_p = 20 \cdot \log_{10} \left[\frac{p}{p_0} \right] \text{ dB} \dots$

$$p = p_0 \cdot 10^{\frac{L_p}{20 \text{ dB}}}$$

Zusammenfassung

Der **Schallpegel** L ist eine objektive, physikalisch messbare Grösse. Es wird sowohl der Schallintensitätspegel L_J (bei dem die Schallintensität auf die Bezugsschallintensität $J_0 = 1 \frac{\text{pW}}{\text{m}^2}$ bezogen wird) als auch der Schalldruckpegel L_p (bei dem der effektive Schalldruck auf den Bezugsschalldruck $\tilde{p}_0 = 20 \mu\text{Pa}$ bezogen wird) verwendet. Diese beiden Schallpegel sind für "normale Luft" (d.h. für $\rho c = 400 \frac{\text{Pa s}}{\text{m}}$) gleich gross.

$$L_J = 10 \log_{10} \left[\frac{J}{J_0} \right] \text{ dB} \qquad L_p = 20 \log_{10} \left[\frac{p}{\tilde{p}_0} \right] \text{ dB}$$

Der Schallpegel L entsteht aus der Schallintensität J oder dem effektiven Schalldruck $\tilde{p}$ durch Logarithmieren. Dadurch wird der grosse Bereich für die Intensitäten, die der Mensch wahrnehmen kann (Hör-grenze zirka $J = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$; Schmerzgrenze zirka $J = 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$) auf einen kleineren Bereich (zirka 0 dB bis zirka 130 dB) transformiert. Das Einheitenzeichen dB (Dezibel) weist darauf hin, dass ein Verhältnis von physikalischen Grössen logarithmiert worden ist.

Schallausbreitung und Doppler Effekt

Schallgeschwindigkeit in Luft

Wir haben schon beim Skript “Mechanische Wellen” Tabellen mit Wellengeschwindigkeiten in verschiedenen Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen aufgeführt. Wir werden dies hier nicht nochmals aufgreifen. In diesem Abschnitt untersuchen wir nur die Schallgeschwindigkeit in Luft.

Gemäss damaliger Tabelle beträgt sie $344 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (bei 20°C und 101.3 kPa). Sie hängt jedoch von der Temperatur ab.

Für Gase gilt allgemein ...

$$c = \sqrt{\frac{\chi p}{\rho}}$$

Mithilfe von $pV = m R_i T$ bzw. $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p}{R_i T}$ (siehe Skript “Wärmelehre”) folgt daraus ...

$$c = \sqrt{\frac{\chi p}{\rho}} = \sqrt{\chi R_i T}$$

Die hier vorkommenden Grössen sind Druck p , Dichte ρ , Isentropenexponent χ , spez. Gaskonstante R_i , absolute Temperatur T .

Daraus folgt für die Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit in Luft mit $R_i = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$ und $\chi = 1.402$...

$$c = \sqrt{\chi R_i T} = \sqrt{1.402 \cdot 287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} (273.15 \text{ K} + t)} \approx 331.6 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0.6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{t}{^\circ\text{C}}$$

Das heisst, dass die Schallgeschwindigkeit pro $^\circ\text{C}$ Temperaturerhöhung um $0.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ zunimmt. Die Erhöhung macht Sinn, da sich bei einer höheren Temperatur die Luftteilchen schneller bewegen und sich so die Welle schneller ausbreiten wird.

Richtung und Richtungsänderung

Ausbreitung

Ein Wellenstrahl breitet sich in der Regel geradlinig aus. Das heisst für eine Punktquelle, dass sich die Welle ...

- im homogenen Raum in der Form einer Kugelwelle,
- in der homogenen Ebene in der Form einer Kreiswelle und
- in einem Stab in der Form einer Geraden ausbreitet.

Trifft die Welle auf ein Hindernis bzw. eine Inhomogenität, wird die geradlinige Ausbreitung verändert. Bei einem Übergang zwischen zwei Medien kann die Welle reflektiert, gebrochen oder gebeugt werden.

Reflexion

Wie wir im Skript “Mechanische Wellen” mit Hilfe der Huygens-Konstruktion gezeigt, gilt bei der **Reflexion** ...

$$\text{Einfallswinkel} = \text{Ausfallswinkel}$$

Nach der Reflexion läuft der Strahl wieder geradlinig weiter.

Brechung

Die **Brechung** an einem Übergang ist etwas komplizierter. Der Strahl erfährt eine Winkeländerung, die durch das Snellius-Gesetz beschrieben wird.

$$\frac{\sin[\alpha_1]}{c_1} = \frac{\sin[\alpha_2]}{c_2}$$

c_1, c_2 Wellengeschwindigkeiten in den Medien

α_1, α_2 Einfalls- bzw. Ausfallswinkel. Die Winkel werden vom Lot aus gemessen.

Diese Beziehung haben wir auch im Skript "Mechanische Wellen" mit Hilfe der Huygens-Konstruktion hergeleitet.

Nach der Brechung läuft der Strahl wieder geradlinig weiter.

Beugung

Bei der sogenannte **Beugung** haben wir nicht einen Übergang zwischen zwei Medien, sondern ein Hindernis. Das Hindernis kann ein Spalt, ein Draht, eine Kante usw. sein. Der Wellenstrahl verläuft nicht geradlinig. Ein Teil der Welle wird um das Hindernis herumgeleitet.

Mit Hilfe der Huygens-Konstruktion kann man den Effekt anschaulich darstellen. Dies machen wir jedoch nicht hier. Wir werden die Beugung vertieft in der "Optik" behandeln: Beugung am Spalt, am Doppelspalt und am Beugungsgitter.

Die Stärke dieses Effekts hängt vom Verhältnis zwischen der Wellenlänge und der Grösse des Hindernisses ab. Sie tritt nur in relevantem Masse auf, wenn die Wellenlänge in der Grössenordnung des Hindernisses liegt.

- Bei Schallwellen trifft dies zu. Die Wellenlängen der hörbaren Schallwellen in Luft liegen zwischen 17 mm und 17 m.
- Bei Lichtwellen trifft dies nicht zu. Die Wellenlängen des sichtbaren Lichts liegen zwischen 0.4 μm und 0.8 μm .

Deshalb können wir um Ecken herum hören, jedoch nicht um Ecken herum sehen.

Doppler-Effekt

Bedeutung des Doppler-Effekts

Der **Doppler-Effekt** ist die Änderung der Frequenz einer Welle bezogen auf einen Beobachter, der sich relativ zur Quelle bewegt. Der Effekt zeigt sich sowohl bei mechanischen als auch bei elektromagnetischen Wellen. Es resultieren jedoch unterschiedliche Formeln, da bei e.m. Wellen nur die Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger relevant ist, und auch noch die Zeitdilatation auf Grund der Speziellen Relativitätstheorie zu berücksichtigen ist.

Christian Doppler ([link](#), [link](#)) entdeckte das Phänomen im Jahre 1842. Es hat eine grosse Bedeutung und wurde auch vom österreichischen Nobelpreisträger Anton Zeilinger ([link](#)) folgendermassen gewürdigt ([link](#)) ...

„Es gibt kaum ein Phänomen in der Wissenschaft, das umfassendere Auswirkungen hat als der nach Christian Doppler, dem Sohn eines Salzburger Steinmetzes, benannte Effekt.“ Und deshalb sei es, so Zeilinger, mehr als gerechtfertigt, „den Doppler-Effekt nicht nur einen Jahrhunderteffekt, in diesem Falle jenen des 19. Jahrhunderts, sondern Jahrtausendeffekt zu nennen“.

Siehe Animation unter Link. Siehe auch Link.

Einleitung

Für alle Wellen gilt das allgemeine Gesetz ...

$$c = \lambda f$$

Dabei ist c die fixe Geschwindigkeit relativ zum ruhenden oder bewegten Medium. Wir gehen im Folgenden von einem ruhenden Medium aus.

Wenn sich eine Signalquelle bewegt, dann verändert sich die Wellenlänge und (da c konstant ist) auch die Frequenz. Diese Frequenzänderung auf Grund der bewegten Quelle nennt man den **akustischen Doppler-Effekt**. Er wurde im Jahr 1842 von Christian Doppler (1803 - 1853, [Link](#)) postuliert.

Animationen zum Doppler-Effekt können auch im Internet gefunden werden ([Link](#)).

Wir stellen im Folgenden die emittierten Schallwellen in folgenden Situationen dar (c ist die Wellengeschwindigkeit) ...

- Ruhender Sender $v_S = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- Bewegter Sender $v_S = 0.5 c$
- Bewegter Sender $v_S = 0.99 c$
- Bewegter Sender $v_S = 1.5 c$

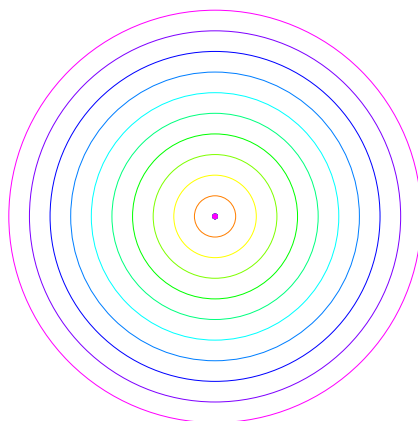
Der Sender sendet ein Signal mit der Frequenz f_S und die Welle breitet sich mit der Geschwindigkeit c aus.

Der Anschaulichkeit halber werden an Stelle der sich in alle 3 Raumdimensionen ausbreitenden Wellen nur die entsprechenden Kreiswellen in der Ebene dargestellt. In den untenstehenden Abbildungen ist jeweils ein Schnappschuss zur Zeit $t = 0$ gemacht worden, und es werden jeweils die Maxima der Auslenkungen dargestellt.

Ruhender Sender $v_S = 0$

Bei einem ruhenden Sender mit der Geschwindigkeit $v_S = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ergibt sich die untenstehende Abbildung.

- Der Sender befindet sich zur Zeit $t = 0$ beim roten Punkt in der Mitte.
- Die Maxima zum orangenen Kreis wurden zur Zeit $t = -T_S$ ausgesandt und haben sich bis zur Zeit $t = 0$ bereits um die Strecke $c T_S = \lambda_0$ ausgebreitet.
- Die Maxima zum gelben Kreis wurden zur Zeit $t = -2 T_S$ ausgesandt und haben sich bis zur Zeit $t = 0$ bereits um die Strecke $c (2 T_S) = 2 \lambda_0$ ausgebreitet.
- usw.



Abbildung

$$v_S = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ruhender Empfänger

Wenn sowohl der Sender (die Schallquelle) als auch der Empfänger (der Detektor) in Ruhe sind, dann bewegen sich die Maxima im zeitlichen Abstand von T_S am Detektor vorbei. Der Detektor misst die gleiche Frequenz wie die Frequenz der Schallquelle.

$$T_E = \frac{\lambda_0}{c} = \frac{c T_S}{c} = T_S$$

$$f_E = f_S$$

Bewegter Empfänger

Wenn sich der Empfänger mit der Geschwindigkeit v_E vom Sender wegbewegt, dann kommt das Wellenmaximum mit der kleineren Relativgeschwindigkeit $c - v_E$ auf den Empfänger zu. Das heisst, wir müssen zur Bestimmung von T_E die Relativgeschwindigkeit $c - v_E$ einsetzen ...

$$T_E = \frac{\lambda_0}{c - v_E} = \frac{T_S c}{c - v_E}$$

$$f_E = \frac{1}{T_E} = \frac{c - v_E}{T_S c} = \frac{c - v_E}{c} f_S$$

Bewegter Sender $v_S < c$

Wenn sich der Sender mit einer (unterhalb der Schallgeschwindigkeit liegenden) Geschwindigkeit von $v_S = 0.5 c$ bewegt, entstehen in Vorwärtsrichtung verkürzte Wellenlängen, während in Rückwärtsrichtung die Wellenlängen gedehnt werden.

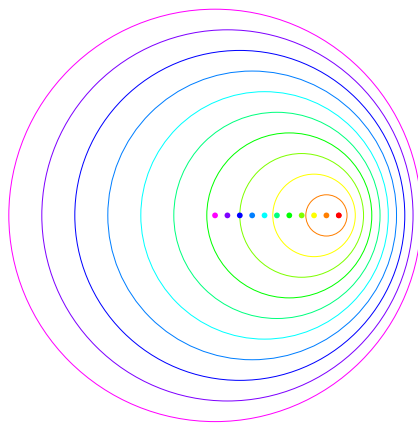


Abbildung $v_S = 0.5 c$

Dies ist in der obenstehenden Abbildung dargestellt. Die Kreise entsprechen dabei wiederum den Maxima, die zur Zeit $-i \cdot T$ ausgesandt wurden. Der Punkt mit der gleichen Farbe gibt die Position an, an der die Welle ausgesandt wurde, und ist gleichzeitig der Mittelpunkt des Kreises mit der gleichen Farbe.

- Roter Punkt: der Sender ist gerade im Begriff, Maxima auszusenden.
- Oranger Punkt und Kreis: das Maximum wurde zur Zeit $t = -T_S$ an der Stelle des orangenen Punkts ausgesandt und die Maxima befinden sich jetzt an der Stelle des orangenen Kreises
- Äusserster Kreis und Punkt ganz links: die Maxima wurden zur Zeit $t = -10 T_S$ an der Stelle dieses Punktes ausgesandt und befinden sich nun beim entsprechenden Kreis.

Wir untersuchen nun rechnerisch diese Situation. Die Geschwindigkeit wird positiv in Richtung vom Sender zum Empfänger gemessen.

Der Sender sendet ein Signal mit der Frequenz f_S , und die Welle breitet sich mit der Geschwindigkeit c aus.

In Vorwärtsrichtung ist der Abstand zwischen zwei Wellenmaxima gleich ...

$$\lambda_{\text{vorwärts}} = c T_S - v_S T_S = T_S (c - v_S)$$

da sich in der Zeit T_S bis zum Aussenden des nächsten Maximums der Sender um den Weg $v_S T_S$ weiterbewegt hat.

Ruhender Empfänger

Der ruhende Empfänger hört diese Signale deshalb im zeitlichen Abstand von ...

$$T_E = \frac{\lambda_{\text{vorwärts}}}{c} = \frac{T_S (c - v_S)}{c}$$

Dies ergibt eine Frequenz von ...

$$f_E = \frac{1}{T_E} = \frac{c}{T_S (c - v_S)} = \frac{c}{c - v_S} f_S$$

In Vorwärtsrichtung ist die Frequenz erhöht, da $\frac{c}{c - v}$ grösser als 1 ist.

Analog ist in der Rückwärtsrichtung die Frequenz erniedrigt, da v negativ ist, und $\frac{c}{c - v}$ damit kleiner als 1 ist.

Bewegter Empfänger

Damit ergibt sich für einen Empfänger, der sich mit der Geschwindigkeit v_E bewegt, und einen Sender, der sich mit der Geschwindigkeit v_S bewegt, die folgende Frequenz ...

$$f_E = \frac{c - v_E}{c - v_S} f_S$$

Doppler-Effekt

Wir müssen uns merken: Die Geschwindigkeiten v_S und v_E sind positiv in Richtung vom Sender zum Empfänger und negativ in der umgekehrten Richtung.

Wenn sich der Sender und der Empfänger mit gleicher Geschwindigkeit in die gleiche Richtung bewegen, haben wir keine Dopplerverschiebung.

Doppler-Effekt bei elektromagnetischen Wellen

Noch wichtiger ist der Doppler-Effekt, der bei elektromagnetischen Wellen auftritt. Die Formeln zur Bestimmung der Frequenz sind jedoch unterschiedlich. Bei einer elektromagnetischen Welle kommt es nur auf die Relativgeschwindigkeit Δv zwischen Sender und Empfänger an, da es keinen Äther (als Medium für die Übertragung von elektromagnetischen Wellen) gibt und die Lichtgeschwindigkeit gemäss Spezieller Relativitätstheorie für alle Beobachter gleich ist. Die Formel lautet ...

$$f_E = \sqrt{\frac{1 \pm \frac{\Delta v}{c}}{1 \mp \frac{\Delta v}{c}}} = \sqrt{\frac{c \pm \Delta v}{c \mp \Delta v}} \quad \text{basiert auf der Zeitdilatation}$$

Das obere Vorzeichen wird verwendet, wenn sich der Sender und der Empfänger aufeinander zu bewegen, das untere Vorzeichen, wenn sich Sender und Empfänger voneinander weg bewegen.

Wichtige Anwendungen sind ...

- Bestimmung der Geschwindigkeit eines Fahrzeugs (Radar),
- Bestimmung der Bewegungen von Sternen und Galaxien,
- Expansion des Universums,
- Teilchenphysik: Wenn sich ein geladenes Teilchen (z.B. Elektron) in einem Medium schneller bewegt als Licht in diesem Medium, wird eine kegelförmige Schockwelle elektromagnetischer Strahlung ausgesendet (Tscherenkov Strahlung).

Überlagerung von Schallwellen

Schallmauer

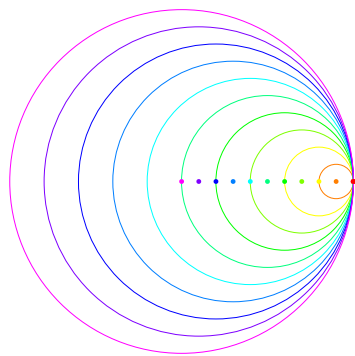
$$v_S = c$$

Wenn die Geschwindigkeit v_S des Senders gleich der Geschwindigkeit der Welle ist, dann folgt ...

$$f_E = \frac{c}{c - v_S} f_S = \frac{c}{c - c} f_S = \frac{c}{0} f_S = \infty$$

Dies ergibt keinen Doppler-Effekt. Wir haben eine sogenannte Schallmauer. Dies wird im Folgenden mit $v_S = 0.99c$ illustriert.

Die Superposition der Schallwellen ergibt unmittelbar vor dem Sender eine Verdichtung. Alle Auslenkungen zeigen in die gleiche Richtung und addieren sich konstruktiv ($\rightarrow$ grosse Dichte). Dies ist wie eine Mauer. Wenn der Sender die Geschwindigkeit v von kleiner c auf grösser c erhöht, muss er diese **Schallmauer** durchbrechen.



Abbildung

$$v_S = 0.999c$$

Mach'scher Kegel, Überschallknall

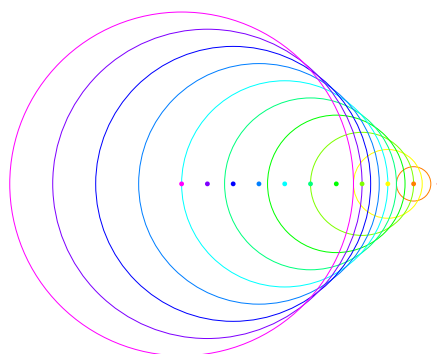
$$v_S > c$$

Wenn die Geschwindigkeit des Senders grösser als die Geschwindigkeit der Welle ist, dann folgt aus ...

$$f_E = \frac{c}{c - v_S} f_S$$

eine negative Frequenz. Dies macht keinen Sinn. Die physikalische Realität ist: Der Sender eilt den Schallwellen davon, wir haben eine Schockwelle.

Für $v_S = 1.5c$ resultiert die folgende Abbildung.



Abbildung

$$v_S = 1.5c$$

Der Sender läuft den Schallwellen davon. Die Superposition der Schallwellen führt im 3D zu einer kegelförmigen Wellenfront mit maximaler Intensität entlang eines Kegelmantels (dem sogenannten **Mach'schen Kegel**). Diese Wellenfront breitet sich vorwärts/seitlich aus. Ein Empfänger, bei dem diese Wellenfront vorbeigeht, hört einen lauten Knall, den sogenannten **Überschallknall**. Siehe auch link.



Abbildung Schallmauer (link)

Wir können diesen Mach'schen Kegel auch sehen, wenn sich ein Boot oder eine Ente in einem See mit einer Geschwindigkeit bewegt, die grösser als die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Oberflächenwellen im See ist.

Noise cancelling

Eine weitere Anwendung der Überlagerung von Schallwellen ist die **“Noise-Cancelling-Technologie”**. Sie funktioniert durch die Erzeugung von Schallwellen, die den unerwünschten Lärm auslöschen. Dies geschieht durch die Verwendung von Mikrofonen, die den Umgebungslärm erfassen, und einer Elektronik, die eine gegenphasige Schallwelle erzeugt. Diese gegenphasige Welle wird dann über Lautsprecher abgespielt, um den unerwünschten Lärm zu reduzieren oder zu eliminieren.

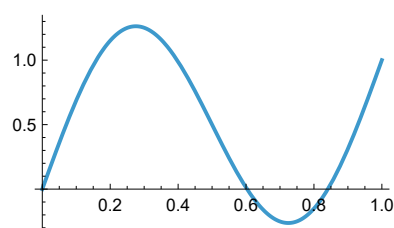
Diese Technologie ist besonders effektiv bei niedrigen und mittleren Frequenzen, wie sie bei Umgebungsgeräuschen zu finden sind, und ist in vielen modernen Geräten wie Kopfhörern und Lautsprechern integriert.

UKW und AM

Vor der Etablierung der terrestrischen Radioübertragung mittels DAB+ wurden die Sprachsignale via AM (Amplituden-Modulation) und für grössere Qualität via UKW (Ultrakurzwelle, engl. FM frequency modulation) übertragen.

Bei der **Amplituden-Modulation** wird ein Trägersignal mit der hohen Frequenz ω_T mit dem Schallsignal moduliert. Wenn beispielsweise das folgende akustische Signal $u[t] = \hat{u} \sin[\omega t]$ übertragen werden soll

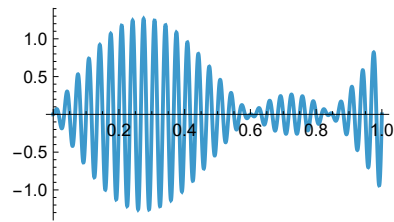
...



dann wird bei der Amplitudenmodulation die Amplitude moduliert und es resultiert ...

$$am[t] = u[t] * \sin[\omega_T]$$

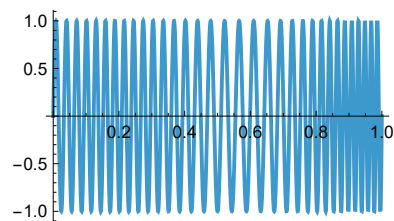
Bei einer Modulationsfrequenz von $\omega_T = 30 \omega$ folgt beispielsweise das folgende Signal ...



Bei der **Frequenz-Modulation** wird hingegen die Frequenz moduliert ...

$$fm[t] = \sin[\omega_T * (1 + u[t])]$$

und es resultiert der folgende Signalverlauf ...



Wir erkennen, dass die Frequenz (bzw. die Dauer zwischen zwei Nulldurchgängen) variiert.

Auf der Empfängerseite wird dann ein elektronischer Demodulator eingesetzt, der aus dem Radiosignal wieder das ursprüngliche Signal (im akustischen Frequenzbereich) erzeugt.

Schallquellen

Übersicht

Entstehung der Schallwelle

Es gibt eine Vielzahl von Quellen, die zu Schallwellen führen (Lautsprecher, menschliche Stimme, Saiten- und Blasinstrumente, Glocken, ...). In allen diesen Fällen führen Schwingungen und Stösse zu einer Energieabgabe an die umgebende Luft. Via Stösse zwischen den Luftmolekülen wird diese Energie in einer Schallwelle weiter transportiert. Die genauen Details sind häufig noch nicht ganz verstanden. Beispiele ...

- Die Membran des **Lautsprechers** schwingt vorwärts und rückwärts und stösst die umgebenden Luftmoleküle an.
- Die **Saiten** von Musikinstrumenten schwingen (transversal) hin und her. Diese Schwingungen werden auf den Resonanzkörper (z.B. Gitarre oder Geige) übertragen und regen die Luft im Instrumentenkörper (Resonator) zum Schwingen an. Diese Schwingungen stossen die umgebenden Luftmoleküle an.
- Bei **Flöten** und **Orgeln** wird durch Anblasen die Luft im Innern der Flöte bzw. der Orgelpfeife zum Schwingen gebracht. Nach einer Einschwingzeit bilden sich stehende Wellen. Ein Teil der Energie wird an die umgebenden Luftmoleküle abgegeben.
- Bei **Glocken** schwingt der ganze Körper. Es stellen sich bestimmte Eigenschwingungen ein, und die umgebenden Luftmoleküle werden angestossen.

Arten von Schall

Wir unterscheiden verschiedene Arten von Schall: Ton, Klang, Geräusch und Knall (Kuchling, Seite 333). In den folgenden Abbildungen ist nur das zeitliche Verhalten der Schallwelle an einem bestimmten Ort dargestellt.

Ton

Ein **Ton** kann durch eine reine Sinus (oder Cosinus) Funktion beschrieben werden und enthält nur eine Frequenz ...

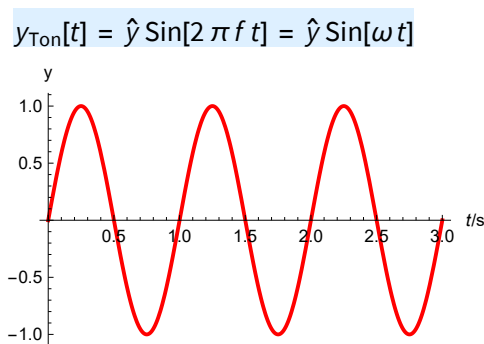


Abbildung $\hat{y} \sin[2 \pi f t]$ mit $f = 1 \text{ Hz}$ und $\hat{y} = 1$

Klang

Ein **Klang** ist eine Überlagerung mehrerer Töne, deren Frequenzen zueinander in einem ganzzahligen Verhältnis stehen (was auf einen periodischen Signalverlauf führt).

$$y_{\text{Klang}}[t] = \sum \hat{y}_i \sin[\omega_i t]$$

Für einen angenehmen Klang (**Konsonanz**) ist der Nenner dieser (gekürzten) Verhältnisse kleiner als 8. Andernfalls spricht man von **Dissonanz** (Kuchling, Seite 341).

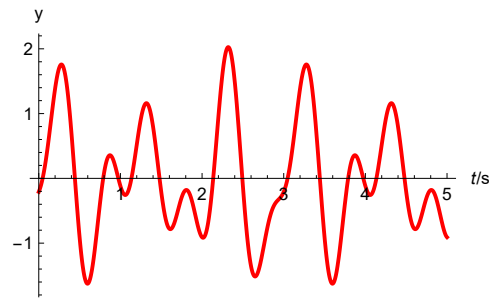


Abbildung $\sin[\omega t] + 0.7 * \sin[2\omega(t - 0.2)] + 0.5 \sin[\frac{4}{3}\omega(t - 0.7)]$ mit $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1 \text{ s}$

Das kleinste gemeinsame Vielfache der Perioden von T , $\frac{T}{2}$ und $\frac{T}{4/3} = \frac{3T}{4}$ ist $3T$. Der Klang hat somit eine Periode von ...

$$T_{\text{Klang}} = 3T \quad \text{siehe Abbildung}$$

Geräusch

Ein **Geräusch** ist eine Überlagerung von sehr vielen Tönen, deren Frequenzen in einem zufälligen, beliebigen, nicht ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen und auch nahe beieinander liegen können ...

$$y_{\text{Geräusch}}[t] = \int (\hat{y}[\omega] * \sin[\omega t]) d\omega$$

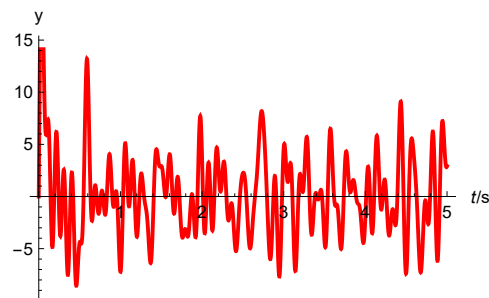


Abbildung $y_{\text{Geräusch}}[t] = \int (\hat{y}[\omega] * \sin[\omega t]) d\omega$

Knall

Ein **Knall** ist eine kurzzeitige Schallwelle.

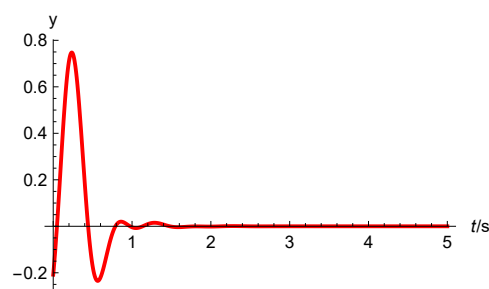


Abbildung Knall

Spektralanalyse

Um aus einem beliebigen zeitlichen Signalverlauf die Frequenzen und die dazugehörigen Amplituden zu bestimmen, gibt es zwei wichtige Verfahren ...

- die Fourier Transformation (siehe Anhang D)
- die Autokorrelation/Autokovarianz (vgl. phyphox)

Fourier Analyse

Die Fourier-Analyse wird an zwei Beispielen illustriert.

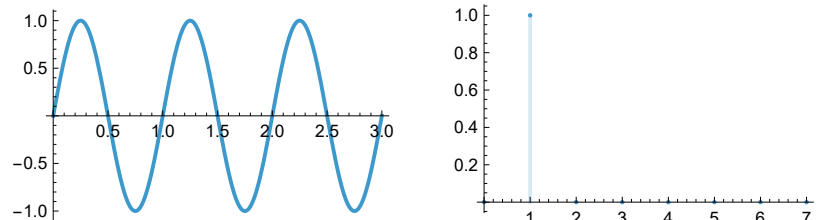


Abbildung Fourier-Analyse von $\sin[2\pi \cdot 1 \text{ Hz} \cdot (t - 2)]$

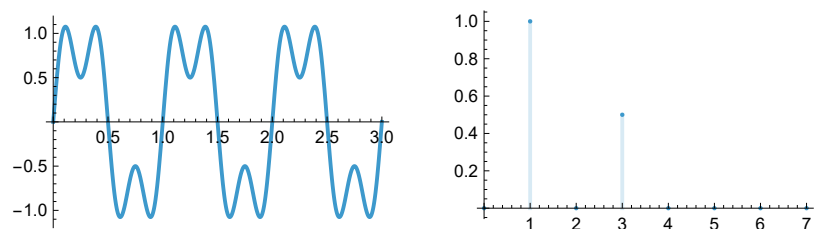


Abbildung Fourier-Analyse von $\sin[2\pi \cdot 1 \text{ Hz} \cdot t] + 0.5 \sin[2\pi \cdot 3 \text{ Hz} \cdot (t - 2)]$

Autokovarianz und Autokorrelation

Die **Autokovarianz** ist ein mathematisches Werkzeug, das in der Signalverarbeitung und Statistik verwendet wird, um Muster und Periodizitäten innerhalb eines Signals oder einer Datenreihe zu identifizieren. Es misst die Ähnlichkeit zwischen einem Signal und einer zeitlich verschobenen Version von sich selbst.

Die Autokovarianz wird berechnet, indem das Produkt des Signals mit einer zeitlich verschobenen Version integriert oder summiert wird.

$$\rho_i = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \bar{a}_{j+i}, \quad \text{für komplexe diskrete Werte}$$

$$R_f(t) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(\tau) f(t+\tau) d\tau \quad \text{für reelle Funktionen}$$

Eine verwandte Funktion ist die Autokorrelation: sie ist die normierte Autokovarianz, so dass die Ergebnisse zwischen -1 und +1 liegen. In gewissen Gebieten wird nicht zwischen Autokovarianz und Autokorrelation unterschieden (Link).

Siehe auch: [Link](#)

Die Funktion "Audio Autokorrelation" ist in phyphox integriert. Damit lässt sich die Frequenz einer Schallwelle, wenn nur eine Frequenz und Rauschen vorkommen, bestimmen.

Schwingende Saiten

Einleitung

Die Untersuchung **schwingender Saiten** ist ein faszinierendes und historisch bedeutsames Thema in der Musik und Physik, das sich über Jahrtausende erstreckt. Sie verbindet die Erkenntnisse von antiken Philosophen und Wissenschaftlern mit den praktischen Anwendungen in Musikinstrumenten.

Pythagoras war einer der ersten, der die Beziehung zwischen der Länge einer Saite und dem erzeugten Ton erforschte. Er entdeckte, dass die harmonischen Intervalle in der Musik durch einfache Zahlenverhältnisse der Saitenlängen erklärt werden können. Diese Entdeckung war ein wesentlicher Beitrag zur Entwicklung der Musiktheorie und führte zur Erfindung des **Monochords**, eines Instruments mit einer einzelnen Saite, das genutzt wurde, um musikalische und mathematische Prinzipien zu demonstrieren.

Galilei trug ebenfalls zur Theorie der schwingenden Saiten bei. Er untersuchte die physikalischen Eigenschaften von Saiten und deren Schwingungen, was zur Entwicklung der Akustik als Wissenschaft führte. Die Arbeiten von Galilei halfen, die Grundlagen der Schwingungslehre zu etablieren und die Mechanik der Saitenschwingungen besser zu verstehen.

Saiteninstrumente sind praktische Anwendungen dieser Erkenntnisse und umfassen eine Vielzahl von Instrumenten wie Gitarren, Geigen und Klaviere. Die Klangqualität und Tonhöhe dieser Instrumente werden durch die Länge, Spannung und Masse der Saiten bestimmt. Die Prinzipien, die Pythagoras und Galilei erforschten, werden in der Konstruktion und dem Spiel dieser Instrumente angewendet, um die gewünschten musikalischen Effekte zu erzeugen.

Ausbreitung der Saitenschwingungen

Die Schwingung einer Saite (Gitarre, Monochord, Klavier) ist eine mechanische Transversalwelle. Über einen Resonanzkörper (Gitarren- oder Geigenkasten) wird Luft zum Schwingen gebracht und diese Schwingung führt zu einer sich ausbreitenden Schallwelle (Longitudinalwelle).

Wenn eine Saite kurz ausgelenkt wird (Puls), dann breitet sich die Störung mit einer bestimmten Geschwindigkeit fort.

An einem festen oder losen Ende wird der Puls reflektiert und wandert so vorwärts und rückwärts mit ebendieser Geschwindigkeit.

Typische Ausbreitungsgeschwindigkeiten sind für die Grundschiwingung einer Gitarre ...

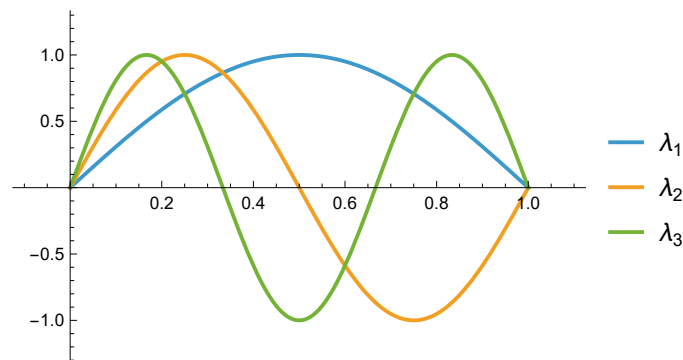
E4-Saite	$c = \lambda f \approx (2 * 0.65 \text{ m}) * 329.63 \text{ Hz} \approx 428.52 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
E2-Saite	$c = \lambda f \approx (2 * 0.65 \text{ m}) * 82.41 \text{ Hz} \approx 107.13 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Schwingungen der Saite

Für eine schwingende Saite haben wir die folgenden Beziehungen ...

- | | |
|-----------------------------------|--|
| (1) $c = \lambda f$ | gilt für jede Welle |
| (2) $c = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ | Geschwindigkeit für eine Transversalwelle
in einem festen Körper (was für eine schwingende
Saite der Fall ist) |

Die Saiten sind am Anfang und am Ende eingespannt. D.h., dass sich dort Schwingungsknoten befinden. Die stehenden Wellen, die sich demzufolge herausbilden, führen für den Grundton (grösste Wellenlänge bzw. tiefste Frequenz) und die ersten Obertöne (höhere Frequenzen als der Grundton) auf die untenstehende Abbildung.



Schnappschüsse der transversalen Auslenkungen

$$L = \{0.5 \lambda_1, \lambda_2, 1.5 \lambda_3, 2 \lambda_4, 2.5 \lambda_5, \dots\}$$

$$2L = \{\lambda_1, 2 \lambda_2, 3 \lambda_3, 4 \lambda_4, 5 \lambda_5, \dots\}$$

$$(3) \quad \lambda_i = \frac{2L}{i} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Zusammengenommen folgt aus (1), (2) und (3) ...

$$f_i = \frac{c}{\lambda_i} = \frac{\sqrt{\frac{F}{\rho A}}}{\frac{2L}{i}} = \frac{i}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Der Grundton ist der Ton mit der tiefsten Frequenz (d.h. $i = 1$) ...

$$\text{Grundton (1. Harmonische)} \quad f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

Die Obertöne folgen mit $i = 2, 3, \dots$

$$1. \text{ Oberton (2. Harmonische)} \quad f_2 = \frac{2}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

$$2. \text{ Oberton (3. Harmonische)} \quad f_3 = \frac{3}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \quad \text{usw.}$$

Aus der obigen Gleichung (3) können wir auch herauslesen ...

- Stärkere Spannung (grösseres $\frac{F}{A}$) bedeutet **grössere** Frequenz.
- Grösserer Querschnitt A bedeutet somit **kleinere** Frequenz.
- Längere (schwingende) Saite L bedeutet somit **kleinere** Frequenz.

Im Anhang B "Experimente und (Musik)geräte" wird unter Saiteninstrumente/Gitarre noch näher auf die Gitarre eingegangen.

Schwingende Luftsäulen

Schwingende Luftsäulen sind ein zentrales Konzept in der Akustik und Musik, das die Erzeugung von Tönen durch die Vibration von Luft in einem begrenzten Raum beschreibt (Beispiele: Orgelpfeife, Flöte, Flasche). Dieses Prinzip ist die Grundlage für eine Vielzahl von Musikinstrumenten und akustischen Phänomenen.

Typische Längen der Luftsäulen sind gemäss $c = \lambda f \dots$

$$\begin{array}{lll} 100 \text{ Hz} & \lambda = \frac{c}{f} = \frac{340 \text{ m/s}}{100 \text{ Hz}} = 3.4 \text{ m} \\ 1000 \text{ Hz} & \lambda = \frac{c}{f} = \frac{340 \text{ m/s}}{1000 \text{ Hz}} = 0.34 \text{ m} & \text{Zirka Länge einer Flöte} \end{array}$$

Die Tonerzeugung erfolgt folgendermassen ...

- Es wird ein Luftstrom erzeugt.
- Dieser Luftstrom wird über eine Kante geleitet und geteilt.
- Dadurch entsteht eine turbulente Strömung.
- Im begrenzten Raum (Orgelpfeife, Flöte, ...) bilden sich durch Resonanz ganz bestimmte Frequenzen aus.
- Die Tonhöhe wird bestimmt ...
 - bei der Orgel durch die Länge der Pfeife,
 - bei der Flöte durch die Länge der schwingenden Luftsäule, die durch das Schliessen/Öffnen der Grifflöcher beeinflusst wird,
Siehe Link für den Zusammenhang der Tonhöhe mit den Grifflöchern.
 - bei der Flasche durch die Länge der Luftsäule (abhängig vom Wasserspiegel in der Flasche).
- Grössere Längen erzeugen tiefere Töne, und kürzere Längen erzeugen höhere Töne.
- Durch stärkeres Anblasen können höhere Harmonische erzeugt werden.

Wichtig ist ...

- Am offenen Ende und am Mundstück gibt es einen Druckknoten (Druck konstant gleich Umgebungsdruck) und einen Auslenkungsbauch.
- Am geschlossenen Ende gibt es einen Druckbauch und einen Auslenkungsknoten (keine Auslenkung).

Geschlossene Pfeife

Für eine geschlossene Pfeife (bzw. angeblasene Flasche) gilt, dass beim geschlossenen Ende ein Wellenknoten und beim angeblasenen Ende ein Wellenbauch auftritt.

Aus (1) $c_{\text{Luft}} = \lambda f$ gilt für jede Welle

$$(2) \quad L = (2i - 1) * \frac{\lambda_i}{4} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

denn (siehe Skizze)

$$L = \frac{\lambda_1}{4} = \frac{1}{4} \lambda_1$$

$$L = \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2}{4} = \frac{3}{4} \lambda_2$$

$$L = \lambda_3 + \frac{\lambda_3}{4} = \frac{5}{4} \lambda_3 \quad \text{usw.}$$

$$(2)' \quad \lambda_i = \frac{4L}{2i - 1} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

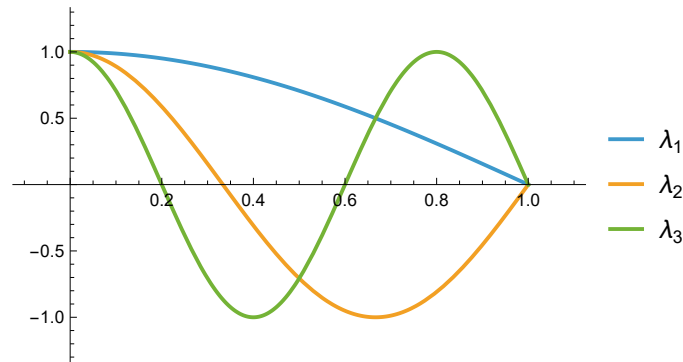


Abbildung Die ersten Harmonischen einer geschlossenen Pfeife.

Es resultieren für den Grundton und die ersten Obertöne die obigen Schnappschüsse für die longitudinalen Auslenkungen der schwingenden Luftsäule. Links ist ein Schwingungsbauch, rechts ein Schwingungsknoten.

Somit folgt aus (1) und (2)' ...

$$f_i = \frac{c}{\lambda_i} = \frac{c}{4L} (2i - 1) \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Der Grundton ist der Ton mit der tiefsten Frequenz (d.h. $i = 1$) ...

Grundton $f_1 = \frac{c}{4L}$

Die Obertöne folgen mit $i = 2, 3, \dots$

1. Oberton $f_2 = \frac{c}{4L} * 3$

2. Oberton $f_3 = \frac{c}{4L} * 5$

Offene Pfeife

Eine offene Pfeife hat an beiden Enden einen Schwingungsbauch ...

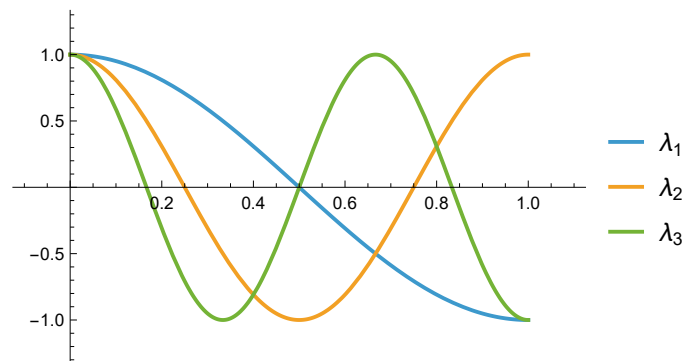


Abbildung Die ersten Harmonischen einer offenen Pfeife.

Analog zur geschlossenen Pfeife können wir ableiten ...

(1) $c = \lambda f$ gilt für jede Welle

(2) $L = (i) * \frac{\lambda_i}{2}$ $i = 1, 2, 3, \dots$ siehe Abbildung

(2)' $\lambda_i = \frac{2L}{i}$ $i = 1, 2, 3, \dots$

$f_i = \frac{c}{\lambda_i} = \frac{c}{2L} (i)$ $i = 1, 2, 3, \dots$

Vergleich

Die Grundschiwingung einer **geschlossenen** Pfeife (mit einem Knoten am geschlossenen Ende und einem Bauch an der Stelle des Anblasens) beträgt ...

$$f_1 = \frac{c}{4L} \quad \text{denn } L = \frac{\lambda_1}{4}$$

Die Grundschiwingung einer **offenen** Pfeife (mit Schwingungsbäuchen an beiden Enden) beträgt ...

$$f_1 = \frac{c}{2L} \quad \text{denn } L = \frac{\lambda_1}{2}$$

Somit ist die **Grundfrequenz** für eine **offene Pfeife grösser**, nämlich doppelt so gross.

Schwingende Körper

Wenn ein Körper angeschlagen oder gestrichen wird, kann er zum Schwingen gebracht werden. Diese Schwingungen lösen Schallwellen aus. Die resultierende Tonhöhe und Klangfarbe werden durch die physikalischen Eigenschaften (Grösse, Form, Material ...) des Körpers bestimmt. Wir werden einige Beispiele kurz besprechen.

Chladni-Klangfiguren

Ernst Florens Friedrich Chladni (1756 - 1827, link) war ein deutscher Physiker und Astronom. Er beschrieb 1787 die nach ihm benannten Klangfiguren.

Die Chladni-Klangfiguren sind faszinierenden Muster, die entstehen, wenn eine schwingende Platte mit Sand bedeckt wird. Die Schwingungen der Platte erzeugen stehende Wellen, die den Sand in regelmässigen Mustern verteilen. Diese Figuren zeigen die Knotenlinien der Schwingungen und sind ein anschauliches Beispiel für die Visualisierung von Wellenformen in schwingenden Körpern.

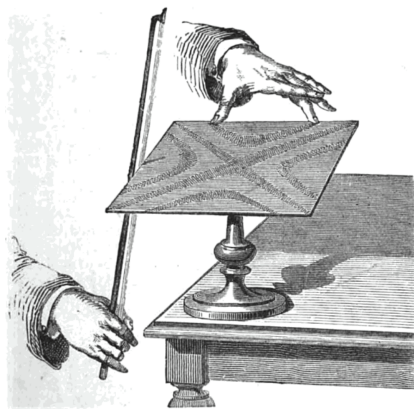


Abbildung Klangfiguren bei einer Metallplatte. Knoten bei den Berührungspunkten.

Im Allgemeinen setzen sich die Schwingungen aus einer Superposition von vielen Eigenschwingungen (Moden) zusammen. Die Anregung einer einzelnen Eigenschwingung geschieht am einfachsten, wenn die Platte an einer Kante mit einem Geigenbogen bestrichen und die Platte an einer anderen Stelle am Rand gehalten wird (wo sich dann ein Knoten befindet). Eine Anregung ist auch möglich mit Hilfe einer schwingenden Stimmgabel.

Im allgemeinen Fall ist das Frequenzspektrum keine harmonische Reihe.

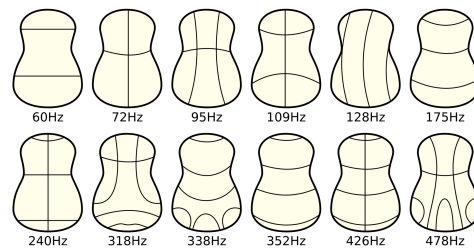


Abbildung Knotenlinien bei einem Geigenkasten.

Xylophon und Metallophon

Klangstäbe (Stabspiele, Link) sind Instrumente, die aus mehreren Stäben oder Platten bestehen. Wenn die Platten

- aus Holz sind, dann werden sie Xylophon genannt (Link); wenn sie
- aus Metall sind, dann werden sie Metallophon genannt (Link).

Die Metallstäbe werden dabei an den Schwingungsknoten gelagert und in der Mitte angeschlagen.



Abbildung Glockenspiel (Link), Beispiel für ein Metallophon

Trommel

Auch Rhythmusinstrumente haben Eigenschwingungen. Beispielsweise für eine Trommel ...

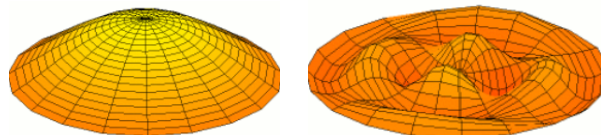


Abbildung Zwei Eigenschwingungen einer Trommel

In der Regel bilden die Eigenfrequenzen keine Harmonischen.

Glocken

Glocken sind typischerweise grosse, hohle Resonanzkörper aus Metall, meist in einer glockenähnlichen Form. Sie besitzen eine schwingende Zunge oder Klöppel im Inneren, die beim Anschlagen gegen die Innenwand der Glocke schlägt, um Schall zu erzeugen. Diese Form ermöglicht komplexe Schwingungsmuster.

Nr.	Name	Gussjahr	Gewicht	Durchmesser	Schlagton	Bemerkungen
1	Dreifaltigkeitsglocke	1965	6190 kg	218 cm	g^0	wird nur an den höchsten Feiertagen oder zu besonderen Anlässen geläutet
2	Johannesglocke	1872	2442 kg		b^0	wird u. a. im Herbst zum Beginn der Traubenernte geläutet
3	Muttergottesglocke	1872	1288 kg		d^1	Angelusglocke
4	Engelglocke	1965	736 kg	109 cm	f^1	Taufglocke
5	Luziusglocke	1872	734 kg		g^1	
6	Florinsglocke	1872	302 kg		b^1	Totenglocklein

Abbildung Die Glocken der Kathedrale in Vaduz (Link).



Abbildung Die Glocken in Aktion (Link)

Schellen

Schellen sind in der Regel kleiner als Glocken und bestehen aus einer hohlen Kugel oder einem Ring mit einem kleinen, losen Metallstück im Inneren, das beim Schütteln gegen die Wände schlägt. Beispiele sind Schellen, die an Musikinstrumenten befestigt sind, wie z.B. Tamburine oder Schellenkränze.



Abbildung Tambourin mit Schellen (Link)

Die mathematische Analyse dieser Körper kann recht komplex sein. Dies ist viel schwieriger als die Analyse von runden Trommeln oder rechteckigen Stäben.

Klangschalen

Klangschalen sind Instrumente, die durch ihre Form und Materialeigenschaften einzigartige akustische Eigenschaften besitzen. Sie werden häufig in Meditation, Musiktherapie und zur Klangheilung eingesetzt. Ihre physikalische Bedeutung liegt in den Schwingungen, die sie erzeugen, und den damit verbundenen Resonanzeffekten. Die Schwingungsmuster sind komplex und können sowohl harmonische als auch nicht-harmonische Frequenzen umfassen.



Abbildung Klangschalen

Geräusche

Neben der Musik und der menschlichen Sprache gibt es auch noch weitere akustische Signale ...

- Naturgeräusche wie Wind, Wasser, Donner, Regen ...
- Tiergeräusche wie das Quaken von Fröschen, Zwitschern von Vögeln ...
- Maschinengeräusche wie Motorenlärm, Klappern von mechanischen Teilen ...
- Schallereignisse wie Klatschen, Klopfen, Zerschlagen von Glas ...

Sie alle haben ihre spezifischen Eigenschaften wie Frequenzen, zeitlichen Verlauf ...

Bei der Charakterisierung von solchen Geräuschen (**Noise**, Rauschen) haben sich verschiedene Kategorien etabliert. Abhängig davon, wie das Power (Intensität) Spektrum $S[f]$ von der Frequenz abhängt, unterscheidet man zwischen violettem, blauem, weißem, rosarotem und braunem Rauschen.

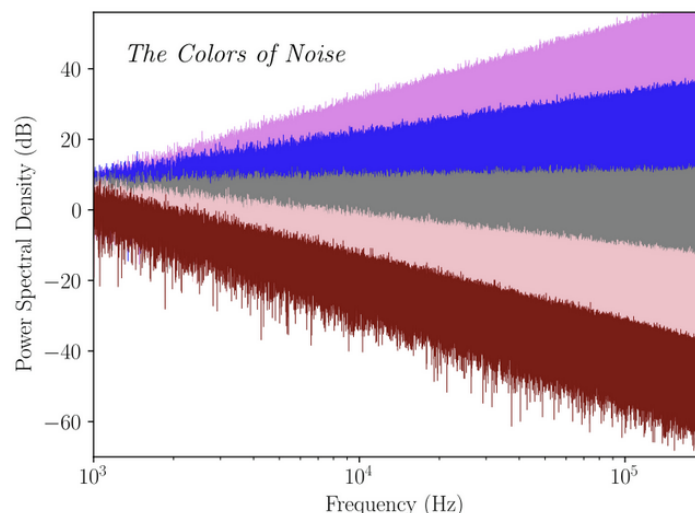


Abbildung Frequenzabhängigkeit des verschiedenfarbigen Rauschens (Link).
Unter diesem Link finden sie auch verschiedene **Hörproben**.

Violet Noise

- $S[f] \propto f^2$
- Spielt eine Rolle bei Tonaufnahmen unter Wasser auf Grund des violetten thermischen Wasserrauschens.

Blue Noise

- $S[f] \propto f$
- Tscherenkov Strahlung hat dieses Verhalten.

White Noise (Weisses Rauschen)

- $S[f] = \text{konstant}$
- Die Leistung pro Herz ist von der Frequenz unabhängig.
- Jedes Frequenz Intervall enthält die gleiche Energie.
- Es wird häufig in statistischen Anwendungen und zur Erzeugung von zufälligen Daten verwendet.

Pink Noise (Rosarotes Rauschen)

- $S[f] \propto \frac{1}{f}$
- Die Intensität des Power Spektrums nimmt mit der Frequenz ab.
- Jede Oktave enthält die gleiche Energie.
- Wird auf Grund dessen im Audibereich eingesetzt.
- Dieses Rauschen tönt wie ein Wasserfall.

Grey Noise

- Das Frequenzspektrum folgt einer "gleiche Lautstärke" Kurve
- Dies gibt dem Hörer den Eindruck, dass es bei allen Frequenzen gleich laut ist.

Ist es wichtig, das Power Spektrum des Rauschens zu kennen?

Ja, dann kann ein im Rauschen verstecktes Signal besser herausgefiltert werden: Stichwort Dithering (Siehe Link oder Link).

Hören

Das menschliche Ohr

Aufbau des menschlichen Ohrs

Das menschliche Ohr besteht aus den drei Hauptteilen ...

- **Äusseres Ohr:** Dazu gehören das **Ohr läppchen**, die **Ohrmuschel** und der **äussere Gehörgang**: Sie sammeln die Schallwellen und leiten sie zum Trommelfell weiter.
- **Mittelohr:** Zum Mittelohr gehören das **Trommelfell** und die **Paukenhöhle** mit den **Gehörknöchelchen** (Hammer, Amboss, Steigbügel), die die Schwingungen verstärken und an das Innenohr weiterleiten.
- **Innenohr:** Die **Cochlea** (Hörschnecke) wandelt die mechanischen Schwingungen in Nervenimpulse um, die zum **Hirn** weitergeleitet werden, wo sie analysiert und interpretiert werden.

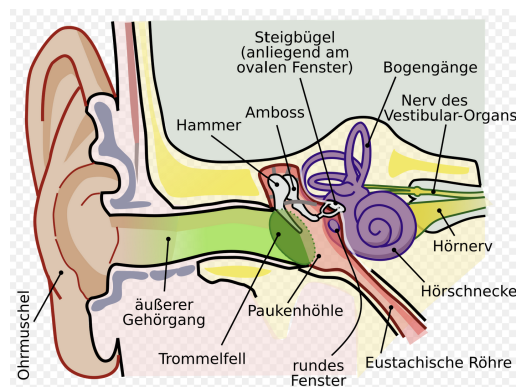


Abbildung Das menschliche Ohr (Link)

Funktionsweise des menschlichen Ohrs

Einleitung

Die Umwandlung von Schallwellen in elektrische Signale im menschlichen Ohr ist ein komplizierter vielstufiger Prozess. Es ist äusserst beeindruckend, dass das menschliche Ohr in der Lage ist, die dem Luftdruck überlagerten Schallwellen herauszufiltern. Der effektive Schalldruck bei der menschlichen Hörgrenze beträgt nur ...

$$p = 20 \mu\text{P} = 0.000020 \text{ Pa}$$

Der Luftdruck (der durch die Molekularbewegung der Luftmoleküle zustande kommt) ist dagegen um rund zehn Zehnerpotenzen grösser ...

$$p_{\text{Luft}} = 100\,000 \text{ Pa}$$

Siehe auch (Link): *Das menschliche Gehör vermag bereits eine äusserst geringe Schallleistung aufzunehmen. Der leiseste wahrnehmbare Schall erzeugt eine Leistung von weniger als 10^{-17} W im Innenohr. Innerhalb einer zehntel Sekunde, die das Ohr braucht, um dieses Signal in Nervenimpulse umzusetzen, wird durch eine Energie von etwa 10^{-18} Joule schon ein Sinneseindruck erzeugt. Daran wird deutlich, wie empfindlich dieses Sinnesorgan eigentlich ist.*

Warum sind so viele Schritte für die Umwandlung von Schall in Nervenimpulse notwendig? Der Grund ist, dass die Impedanzen der Luft und der Flüssigkeit in der Cochlea sehr unterschiedlich sind und so der grösste Teil der eintreffenden Schallwelle beim direkten Übergang Luft/Cochlea reflektiert würde.

Da die Impedanzen ein Verhältnis von zirka 3300 haben, würden nur zirka 1 Promille transmittiert, der Rest würde reflektiert ...

$$T = \frac{4 Z_2 / Z_1}{(Z_2 / Z_1 + 1)^2} = \frac{4 \cdot 3300}{(3300 + 1)^2} = 0.0012$$

Wir untersuchen nun Schritt für Schritt die Schallumwandlung.

Ohrmuschel und Gehörgang

Die Ohrmuschel konzentriert die Schallwellen wie ein Trichter und leitet sie über den Gehörgang an das Trommelfell weiter.

Die beiden Ohren erlauben die Feststellung der **Richtung** des Schalls (link). Beispielsweise mittels Unterschieden in der Laufzeit oder dem Schallpegel zwischen dem linken und dem rechten Ohr. Ausserdem bilden die Erhebungen und Vertiefungen der Ohrmuschel akustische Resonatoren, die jeweils bei Schalleinfall aus einer bestimmten Richtung angeregt werden, was auch zur Richtungsbestimmung verwendet werden kann.

Ausserdem erlaubt die Lautstärke auf Grund der Erfahrung mit verschiedenen Schallquellen eine ungefähre **Entfernungsmessung**.

Zusätzlich wirkt der Gehörgang wie ein Resonator (mit der fundamentalen Frequenz 3.2 kHz und den Obertönen 9.6 kHz und 16 kHz). Die Intensität von Schallwellen im Frequenzbereich von 2 kHz bis 5 kHz wird so um den Faktor 3 bis 10 verstärkt.

Trommelfell und Gehörknöchelchen

Das Trommelfell verschliesst den Gehörgang zum Mittelohr und hindert Fremdkörper daran, tiefer ins Ohr einzudringen. Über die Eustachische Röhre herrscht im Mittelohr der Umgebungsluftdruck.

Trifft eine Schallwelle auf das Trommelfell (eine hauchdünne 0.1 mm dicke Membran, zirka 9 mm mal 12 mm gross), versetzt sie es in Schwingungen. Das Trommelfell ist trichterförmig nach innen gewölbt. Das Trommelfell trägt wesentlich dazu bei, die unterschiedlichen Impedanzen auszugleichen, denn seine Fläche ist zirka 15-mal grösser als das ovale Fenster, womit der Schalldruck allein auf Grund der unterschiedlichen Flächen um den Faktor 15 erhöht wird. Zusätzlich bewirkt die Hebelwirkung des Hammer/Amboss/Steigbügel Systems eine Vergrösserung der Auslenkung um den Faktor 1.3 und damit eine Vergrösserung der Intensität um den Faktor 1.3².

Der Hammer hat direkten Kontakt zum Trommelfell. Er überträgt die Vibrationen an den Amboss und den Steigbügel. Die drei Gehörknöchelchen sind winzig. Der Steigbügel beispielsweise misst kaum mehr als 3 Millimeter und ist damit der kleinste Knochen des menschlichen Körpers. Er transportiert die Schwingung an das ovale Fenster der Cochlea ins Innenohr.

Cochlea (Hörschnecke)

Die Bewegung des Steigbügels am ovalen Fenster erzeugt Druckwellen in der mit Flüssigkeit gefüllten Cochlea, einem schneckenhausförmigen Hohlraum. In der Cochlea werden die Schallwellen in elektrische Signale umgewandelt, und es findet auch eine partielle Frequenzanalyse statt. Es ist der mit Abstand komplizierteste Teil des Ohrs.

Die Cochlea besteht aus drei länglichen Kanälen: der scala vestibuli, der scala tympani und der scala media. Zwischen diesen Kanälen befindet sich die Basilarmembran.

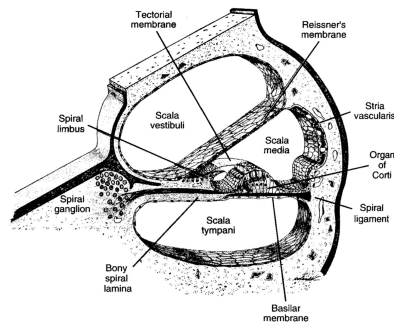


Abbildung Querschnitt durch das Innenohr

Basilarmembran

Die Druckwellen bewegen sich durch die Scala vestibuli und Scala tympani der Cochlea (hin und her) und die gegenläufigen Strömungen führen auf Grund von Reibungskräften zu einer transversalen Schwingung der Basilarmembran. Die Schwingungsorte entlang der Basilarmembran sind frequenzabhängig: hohe Frequenzen verursachen Schwingungen nahe beim ovalen Fenster, während niedrige Frequenzen weiter weg in der Cochlea Schwingungen auslösen.

Haarzellen

Auf der Basilarmembran befinden sich Haarzellen, die mechanorezeptorische Sensoren sind. Die Bewegung der Basilarmembran führt dazu, dass sich die Haarzellen verbiegen, elektrische Signale auf die Hörnervenfaser übertragen und ans Gehirn weitergeleitet werden. Je stärker der Schalldruck, desto mehr Härchen werden verbogen und desto stärker werden die einzelnen Härchen verbogen.

Siehe auch link.

Lautstärke

Einleitung

Die weiter vorne besprochenen Schallintensitäten und Schallpegel sind objektive physikalische Größen und messbar. Es gilt jedoch ...

- Das menschliche Ohr kann nicht Schallwellen aller **Frequenzen** wahrnehmen. Der hörbare Bereich ist eingeschränkt.
- Das menschliche Ohr kann Schallwellen sehr kleiner **Stärke** nicht wahrnehmen.
- Das menschliche Ohr nimmt einen Schalldruckpegel von beispielsweise 80 dB bei einer Frequenz von 1 kHz oder 4 kHz nicht als gleich laut wahr.

Um einen Bezug zum menschlichen Ohr herzustellen, wird ein vom Schallpegel und der Frequenz abhängiger Begriff eingeführt: der Lautstärkepegel.

Hörfäche und Lautstärkepegel (in phon)

Da der Mensch bei akustischen Wellen via Ohr nur Frequenzen von (zirka) 20 Hz bis 20 kHz wahrnehmen kann und die Wellengeschwindigkeit zirka $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beträgt, kann der Mensch Schallwellen hören, die eine Wellenlänge im Bereich ...

$$\begin{aligned}
 f_{\max} &= 20 \text{ kHz} & \lambda_{\min} &= \frac{c}{f} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{20 \text{ kHz}} = 17 \text{ mm} \\
 f_{\min} &= 20 \text{ Hz} & \lambda_{\max} &= \frac{c}{f} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{20 \text{ Hz}} = 17 \text{ m}
 \end{aligned}$$

von zirka 17 mm bis 17 m haben.

Der Wellenlängenbereich, den wir beim Licht mittels Sehen wahrnehmen können, liegt hingegen bei zirka ...

$$\lambda_{\min} = 380 \text{ nm} \quad \text{violett}$$

$$\lambda_{\max} = 780 \text{ nm} \quad \text{rot}$$

Dies ist der Grund, warum wir um Kanten herum hören, aber nicht um Kanten herum sehen können. Damit Beugung auftritt, müssen die Wellenlänge und die Grösse der Hindernisse die gleiche Grössenordnung haben. Deshalb tritt Beugung bei Licht für Hindernisse mit einer Grösse im Bereich Mikrometer auf (siehe das Doppelspaltexperiment im Skript "Optik").

Die **Hörfläche**, auch Hörbereich oder Hörfeld, ist jener Frequenz- und Schallpegelbereich, der vom menschlichen Gehör wahrgenommen werden kann.

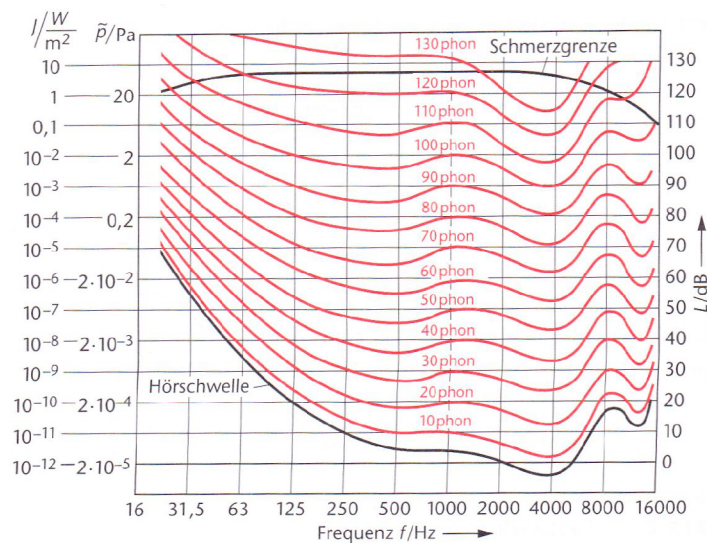


Abbildung Abszisse: Frequenz
 Ordinate: Schallintensität (links) und Schallintensitätspegel (rechts)
 Rote Kurven: Kurven gleicher Lautstärke
 Schwarze Kurven: Hörschwelle und Schmerzgrenze

Die untere Begrenzung ist die **Hörschwelle** (auch Ruhehörschwelle, Reizschwelle). Dies ist diejenige Schallintensität (oder Schalldruck) beziehungsweise derjenige Schallintensitätspegel (oder Schalldruckpegel), bei dem das menschliche Gehör Töne oder Geräusche gerade noch wahrnimmt. Die obere Begrenzung wird **akustische Schmerzschwelle** genannt. Wie in der Abbildung ersichtlich, sind beide Schwellen frequenzabhängig.

Die vier Grenzbereiche der Hörfläche (Hörschwelle, Schmerzschwelle, tiefste- und höchste hörbare Frequenz) werden in ihrer Gesamtheit auch als **Hörgrenze** bezeichnet. Die Hörgrenzen sind individuell sehr unterschiedlich, insbesondere mit dem Alter sinkt die obere Frequenzgrenze und die Hörschwelle steigt.

Für die Schwelle der Hörbarkeit eines Sinustons von **1000 Hz** wurde ein Schalldruck von **20 μPa als Referenzwert** für den absoluten Schalldruckpegel festgelegt. Das war ein mittlerer Wert aus Messungen an vielen Menschen. Später stellte sich heraus, dass dieser Wert für 1000 Hz etwas zu niedrig angesetzt war und ungefähr für 2000 Hz zutrifft. Dennoch wurde am ursprünglichen Referenzwert festgehalten.

Die bisher besprochenen Schallpegel sind physikalische Grössen und objektiv messbar. Die Lautstärke hingegen, mit der der Mensch einen Schallpegel subjektiv empfindet, hängt vom Gehörsinn ab und ist eine physiologische Grösse. Sie wird in Phon (phon) angegeben. Diese Bezeichnung ist wie Dezibel keine Einheit, sondern soll kennzeichnen, dass es eine physiologische Grösse ist. Die in der Abbildungen eingezeichneten Kurven sind Kurven gleich empfundener Lautstärke. Sie wurden so festgelegt, dass bei einem 1 kHz Sinussignal der Zahlenwert für den Schalldruckpegel in dB mit dem Zahlenwert für den

Lautstärkepegel in phon übereinstimmt (siehe Abbildung).

Die in der Abbildung roten Kurven gleicher Lautstärke sind jene Kurven, die als gleich laut empfunden werden. Betrachten wir die 70 phon Kurve. Wir empfinden als gleich laut die folgenden Schallpegel ...

125 Hz	70 phon	71 dB	per definitionem gleich
500 Hz	70 phon	65 dB	
1000 Hz	70 phon	70 dB	
4000 Hz	70 phon	61 dB	
8000 Hz	70 phon	77 dB	

Sind sieben dB ein grosser Unterschied? Wir können die Beziehung $\Delta L_J = 10 \log_{10} \left[\frac{J_1}{J_2} \right]$ dB = 7 dB verwenden und erhalten ...

$$\frac{7 \text{ dB}}{10 \text{ dB}} = \log_{10} \left[\frac{J_1}{J_2} \right]$$

$$\frac{J_1}{J_2} = 10^{\frac{7}{10}} \approx 5.01$$

Das heisst, ein Ton bei 8000 Hz wird als gleich laut empfunden wie ein Ton bei 1000 Hz, dessen Intensität fünf mal kleiner ist.

Zusammenfassung

Der **Lautstärkepegel** ist eine subjektive, physiologische Grösse, bei der die frequenzabhängige Empfindlichkeit des menschlichen Ohrs mitberücksichtigt wird. Man kann auch sagen: der Lautstärkepegel ist der mit der Empfindlichkeit des (typischen) menschlichen Ohrs gewichtete Schallpegel. Der Lautstärkepegel wird in phon angegeben.

Bei einer Frequenz von 1000 Hz stimmen der Zahlenwert des Schallpegels (in dB) und der Zahlenwert des Lautstärkepegels (in phon) überein. Für andere Frequenzen wird zur Umrechnung des Schallpegels in Lautstärkepegel die "Kurve gleicher Lautstärke" verwendet.

Lautheit (in sone)

Es gibt noch eine weitere Möglichkeit, das menschliche Lautstärkeempfinden zu charakterisieren: Die **Lautheit** (link) mit der Einheit **sone** (link).

Wir haben bislang die Stärke der Schallwellen folgendermassen charakterisiert ...

■ die Intensität	objektiv	J	$[J] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
der effektive Schalldruck	objektiv	$\tilde{p}$	$[\tilde{p}] = \text{Pa}$

Um die Riesenbandbreite der Intensitäts- und Schalldruckwerte zu verkleinern, wurde mit Hilfe des Logarithmus der Schallpegel eingeführt ...

■ der absolute Schallintensitätspegel	objektiv	$L_J = 10 * \log_{10} \left[\frac{J}{10^{-8} \text{ W/m}^2} \right]$	$[L_J] = \text{dB}$
der absolute Schalldruckpegel	objektiv	$L_p = 20 * \log_{10} \left[\frac{\tilde{p}}{20 \mu\text{Pa}} \right] \text{ dB}$	$[L_p] = \text{dB}$

Der Logarithmus führt dazu, ...

- dass eine 10-fache Intensität einen um 10 dB grösseren Schallpegel hat und
- dass eine 2-fache Intensität einen um zirka 3 dB grösseren Schallpegel hat.

Um die Stärke des Schalls in Bezug auf den Menschen auszudrücken, wurde der Lautstärkepegel mit Hilfe der experimentellen Kurven gleicher Lautstärke eingeführt (wobei für einen 1000 Hz Ton die Zahlenwerte für den Schallpegel und den Lautstärkepegel übereinstimmen) ...

■ der Lautstärkepegel	subjektiv	$L_N = 20 * \log_{10} \left[\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_0} \right] \text{ dB}$
-----------------------	-----------	--

Aber weder die Intensität noch der Lautstärkepegel sind gute Masse für das menschliche Lautstärkeempfinden.

- Das Verdoppeln der Intensität führt zu viel weniger als einem Verdoppeln der empfundenen Lautstärke. Einfach ausgedrückt: die empfundene Lautstärke ist nicht proportional zur Intensität.
- Der Schallpegel ist proportional zum Logarithmus der Intensität. Ebenso der Lautstärkepegel (exakt für einen 1000 Hz Ton). Der Logarithmus der Intensität überkompensiert jedoch die Ungenauigkeit. Die Erhöhung der Intensität um 1% erhöht den Lautstärkepegel um 0.043 dB. Um ein besseres Mass für die Lautstärke zu bekommen, wird der Lautstärkepegel L_N (in phon) in die **Lautheit s** (engl. loudness) mit der Einheit sone transformiert.

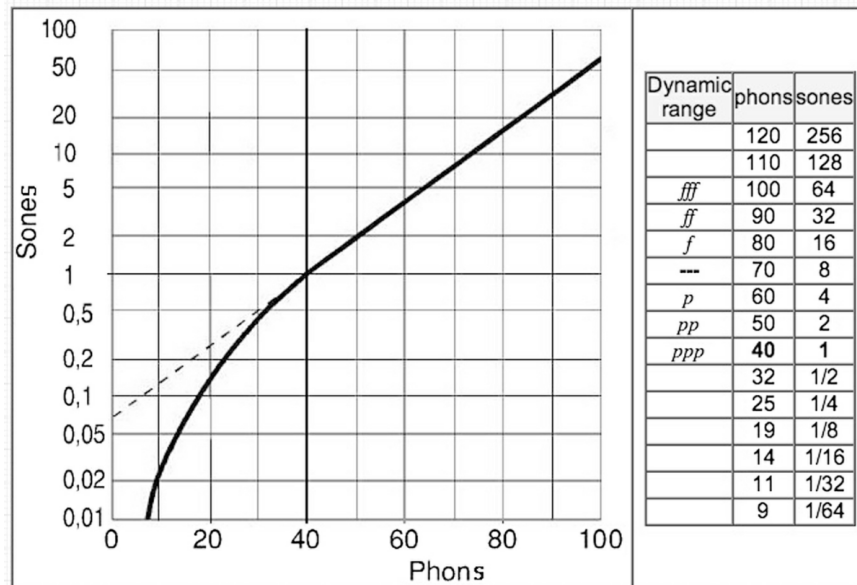


Abbildung Sone versus Phon. Achtung: halblogarithmische Skala.

+ Tabelle mit Lautstärkezeichen der Musik (*fff* ... *ppp*), phon, sone

Man sieht, dass sich die Kurve unterhalb und oberhalb von 40 phon unterschiedlich verhalten. Es gilt ...

$$s = 2^{\frac{L_N - 40 \text{ dB}}{10 \text{ dB}}} \text{ sones} \quad \text{für } L_N \geq 40 \text{ dB}$$

$$s = \left(\left(\frac{L_N}{40 \text{ dB}} \right)^{2.86} - 0.05 \right) \text{ sones} \quad \text{für } L_N < 40 \text{ dB}$$

Bemerkung: Unklar ist, warum die beiden Formeln für den Lautstärkepegel von 40 dB nicht den gleichen Wert für die Lautheit liefern.

Oberhalb von 40 dB führt eine Erhöhung des Schallpegels um 10 dB auf eine Verdoppelung der Lautstärke, was besser dem menschlichen Empfinden entspricht. Dies führt auf die folgende Formel für die Intensität (da 10 dB eine 10-fache Intensität bedeutet und aus $10^x = 2$ folgt, dass $x = 0.30103$) ...

$$s = \left(\frac{J}{J_{40 \text{ dB}}} \right)^{0.30103} \approx \left(\frac{J}{J_{40 \text{ dB}}} \right)^{0.3}$$

Das heisst, wenn sich die Intensität um 1 % erhöht, steigt die Lautheit um zirka 0.3 %.

Wer sich noch tiefer in das Obige vertiefen möchte, siehe (Link).

Schalldruckpegel und Schalldruck diverser Schallquellen

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Schallpegel typischer Schallquellen.

Situation bzw. Schallquelle	Entfernung von Schallquelle bzw. Messort	Schalldruck (Effektivwert) $\tilde{p}$	unbewerteter Schalldruckpegel L_p
Lautest mögliches Geräusch	Umgebungsluftdruck	101 325 Pa	194 dB
Düsenflugzeug	30 m	630 Pa	150 dB
Gewehrschuss	1 m	200 Pa	140 dB
Schmerzschwelle	am Ohr	100 Pa	134 dB
Gehörschäden bei kurzzeitiger Einwirkung	am Ohr	ab 20 Pa	120 dB
Kampfflugzeug	100 m	6,3–200 Pa	110–140 dB
Drucklufthammer / Diskothek	1 m	2 Pa	100 dB
Gehörschäden bei langzeitiger Einwirkung	am Ohr	ab 360 mPa	85 dB
Hauptverkehrsstraße	10 m	200–630 mPa	80–90 dB
Pkw	10 m	20–200 mPa	60–80 dB
Fernseher auf Zimmerlautstärke	1 m	20 mPa	60 dB
Sprechender Mensch (normale Unterhaltung)	1 m	2–20 mPa	40–60 dB
Sehr ruhiges Zimmer	am Ohr	200–630 μ Pa	20–30 dB
Blätterrauschen, ruhiges Atmen	am Ohr	63,2 μ Pa	10 dB
Hörschwelle bei 2 kHz	am Ohr	20 μ Pa	0 dB

Abbildung Schalldrücke und Schalldruckpegel verschiedener Quellen (Link)

Weitere Beispiele finden Sie unter Link.

Bewerteter Schallpegel

Da das menschliche Ohr Töne mit gleichem Schalldruck in unterschiedlichen Tonhöhen (d. h. Frequenzen) unterschiedlich laut empfindet, werden bei Lärmmessungen Frequenzbewertungskurven verwendet, wie sie in folgender Abbildung dargestellt sind. Damit wird die frequenzabhängige Empfindlichkeit des menschlichen Ohrs weitgehend angenähert.

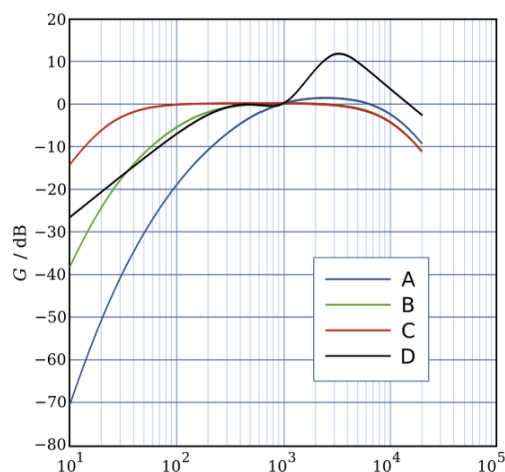


Abbildung Bewertungsfilter (Link)

Die verschiedenen Kurven bedeuten ...

- A-Bewertung: entspricht den Kurven gleicher Lautstärkepegel bei ca. 20 - 40 phon
- B-Bewertung: entspricht den Kurven gleicher Lautstärkepegel bei ca. 50 - 70 phon
- C-Bewertung: entspricht den Kurven gleicher Lautstärkepegel bei ca. 80 - 90 phon
- D-Bewertung: entspricht den Kurven gleicher Lautstärkepegel bei sehr hohen Schalldrücken

Wenn Sie also die Angabe 80 dBA oder 80 dB(A) oder 80 dB_A antreffen, heisst das, dass das Signal mit dem obigen Filter korrigiert wurde.

Die A-Bewertung ist die am häufigsten benutzte Bewertung.

Akustische Täuschungen

Combination Tones

Ein interessantes Phänomen sind die **Combination Tones** (Tartini Tones). Wenn zwei hohe Töne unterschiedlicher Frequenz gespielt werden, dann hört das menschliche Ohr einen leisen tiefen Ton. Dieser Effekt wurde erstmals vom Geiger Giuseppe Tartini (1692 - 1770, [link](#)) entdeckt und in einer Publikation im Jahre 1754 beschrieben.

Die heutige Erklärung stammt von Hermann von Helmholtz (1821 - 1894, [link](#)), und das Phänomen ist auf die Nichtlinearität des menschlichen Mittelohrs zurückzuführen. Szabolcs Horvat geht ausführlich mit Klangbeispielen in einem Beitrag ([link](#), [link](#)) auf dieses Phänomen ein.

Die Erklärung geht folgendermassen ...

- Gegeben sei das Eingangssignal $u[t] = \sin[\omega_1 t] + \sin[\omega_2 t]$ eines Verstärkers.
- Wenn die Verstärkung linear ist, gilt für das Ausgangssignal $o[t]$...
 - $o[t] = c_1 u[t] = c_1 \sin[\omega_1 t] + c_1 \sin[\omega_2 t]$
 - Es kommen die gleichen Frequenzen ω_1 und ω_2 vor.
 - Wir setzen im Folgenden der kürzeren Schreibweise wegen: $\varphi_1 = \omega_1 t$, $\varphi_2 = \omega_2 t$
- Wenn die Verstärkung nicht-linear ist, gilt für das Ausgangssignal ...
 - $o[t] = c_1 u[t] + c_2 u[t]^2 + c_3 u[t]^3 + \dots$
- Wegen $u[t]^2 = (\sin[\varphi_1] + \sin[\varphi_2])^2$

$$= 1 - \frac{1}{2} (\cos[2\varphi_1] + \cos[2\varphi_2]) + \cos[\varphi_1 - \varphi_2] - \cos[\varphi_1 + \varphi_2]$$
 kommen nun neben ω_1 und ω_2 auch die Frequenzen $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1 - \omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$ vor.
- Wegen $u[t]^3 = (\sin[\varphi_1] + \sin[\varphi_2])^3$

$$= \frac{9}{4} (\sin[\varphi_1] + \sin[\varphi_2]) - \frac{1}{4} (\sin[3\varphi_1] + \sin[3\varphi_2]) + \frac{3}{4} (\sin[2\varphi_1 - \varphi_2] - \sin[2\varphi_1 + \varphi_2] - \sin[\varphi_1 - 2\varphi_2] - \sin[\varphi_1 + 2\varphi_2])$$
 kommen neben ω_1 und ω_2 auch noch die folgenden Frequenzen vor ...

$$3\omega_1, 3\omega_2, 2\omega_1 - \omega_2, \omega_1 + 2\omega_2, \omega_1 - 2\omega_2, 2\omega_1 + \omega_2$$

Wir hören Töne, die in der Schallwelle gar nicht vorkommen!

Yanny oder Laurel ?

Das Phänomen “Nanny oder Laurel” bezieht sich auf eine akustische Illusion, die im Jahr 2018 viral wurde. Es handelt sich um eine Tonaufnahme, bei der verschiedene Menschen unterschiedliche Wörter hören, obwohl sie das gleiche Klangsignal hören. Einige Menschen hören “Laurel”, während andere “Yanny” hören. Dieses Phänomen ist ein Beispiel für die subjektive Wahrnehmung von Klang und zeigt, wie unsere Gehirne Geräusche interpretieren.

Die Erklärung geht folgendermassen: Die Aufnahme hat sowohl hohe als auch niedrige Frequenzen, und je nachdem, welche Frequenzen stärker wahrgenommen werden, kann jemand “Yanny” oder “Laurel” hören. Menschen, die höhere Frequenzen stärker wahrnehmen, tendieren dazu, “Yanny” zu hören, während diejenigen, die niedrigere Frequenzen stärker wahrnehmen, eher “Laurel” hören. Das Phänomen zeigt auch, wie Erwartungen und Vorurteile die Wahrnehmung beeinflussen können. Wenn jemand bereits erwartet, ein bestimmtes Wort zu hören, kann dies die Interpretation des gehörten Klangs beeinflussen. Hier ist ein Link zur Aufnahme.

Achtung: Die Wahrnehmung der Wörter “Yanny” oder “Laurel” hängt auch stark von den verwendeten Lautsprechern oder Kopfhörern sowie von der Umgebungslautstärke ab.

Gesetze + Verordnungen zum Lärm

Wilhelm Busch “Musik wird oft nicht schön gefunden, weil sie stets mit Geräusch verbunden.”

Nicht jeder empfindet die gleiche Schallquelle gleich: sei es ein Motorengeräusch oder Musik. Deshalb wurden gesetzliche Vorschriften erlassen, um die Menschen vor übermässigem Lärm zu schützen.

In der Schweiz gilt beispielsweise:

- Das Umweltschutzgesetz bildet die Grundlage für den Schutz vor schädlichen oder lästigen Einwirkungen, einschliesslich Lärm. Es legt die allgemeine Verpflichtung fest, Lärmbelastungen so weit wie möglich zu vermeiden.
- Die Lärmschutz-Verordnung basiert auf dem Umweltschutzgesetz und konkretisiert die Anforderungen an den Lärmschutz. Sie definiert Emissions- und Immissionsgrenzwerte für verschiedene Lärmquellen, wie Verkehr, Industrie und Gewerbe, sowie Freizeitlärm.
- Die Verkehrslärmschutzverordnung zielt darauf ab, die Lärmbelastung durch Strassen-, Schienen- und Flugverkehr zu reduzieren. Sie legt die zulässigen Lärmgrenzwerte für diese Verkehrsarten fest und enthält Massnahmen zur Lärminderung.
- Auf kantonaler Ebene gibt es Bauvorschriften, die Lärmschutzmassnahmen bei der Planung und Genehmigung von Bauprojekten berücksichtigen. Diese Vorschriften können Lärmschutzwände, spezielle Fenster oder andere bauliche Massnahmen umfassen.
- Viele Gemeinden haben lokale Vorschriften zu Ruhezeiten, die den Lärmpegel während bestimmter Tageszeiten, insbesondere nachts, begrenzen.

Zur konkreten Umsetzung werden die im Skript verwendeten Definitionen für Schallpegel usw. verwendet. Eine schöne Zusammenstellung in Bezug auf die Lärmentwicklung von Wärmepumpen kann im Web gefunden werden (Link).

ES	Planungswert		Immissionsgrenzwert		Alarmwert	
	Tag	Nacht	Tag	Nacht	Tag	Nacht
I	50	40	55	45	65	60
II	55	45	60	50	70	65
III	60	50	65	55	70	65
IV	65	55	70	60	75	70

ES I Erholungszonen
 ES II Wohnzonen
 ES III Wohn- und Gewerbebezonen
 ES IV Industriezone

Abbildung Grenzwertschema der Lärmschutzverordnung für Industrie und Gewerbelärm.

Musik

Einleitung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Musik. Die Geschichte der Musik ist eine faszinierende Reise durch die Zeit, die mit den einfachsten musikalischen Formen begann und sich zu den komplexen Strukturen entwickelt hat, die wir heute kennen (siehe Anhang F).

In der deutschen Wikipedia wird Musik folgendermassen definiert (Link) ...

*Musik ist eine Kunstgattung, deren Werke aus **organisierten Klängen** bestehen, die Empfindungen oder Assoziationen hervorrufen können. Als Ausgangsmaterial dienen **Töne, Klänge** und **Geräusche**, sowie deren akustische Eigenschaften, wie **Lautstärke, Klangfarbe, Tonhöhe** und **Tondauer**. Musik wird gelegentlich als „hörbare Mathematik“ bezeichnet.*

Die meisten dieser Begriffe haben wir schon angetroffen ...

- Ton, Klang und Geräusch haben wir schon in der Einleitung weiter vorne diskutiert.
- Ebenso die Lautstärke und die Tonhöhe.

Viele weitere Begriffe könnten im Zusammenhang mit der Musik untersucht werden. Im Anhang ist eine umfassendere Liste relevanter Begriffe aufgeführt ...

- Tonart bzw. Tonleiter: pentatonische, diatonische, chromatische, ...
 - Die Tonleiter (engl. musical scale) enthält sämtliche Töne einer Tonart (engl. key).
 - Die Lage der Halbtonschritte und der erste Grundton sind kennzeichnend für die Tonart.
- Akkord, Rhythmus, Melodie, Harmonie, Taktart, Dynamik, Timbre, Intervall, ...

Wir untersuchen hier nur die für die Physik relevantesten Begriffe.

Das menschliche Ohr ist in der Lage, Frequenzen von zirka 20 Hz bis zirka 20'000 Hz wahrzunehmen.

Welche diskreten Frequenzen werden für die Musik in der Regel verwendet? Grundsätzlich haben wir eine riesengrosse Auswahl und im Laufe der Zeit haben die Kulturen unterschiedliche Auswahlen getroffen.

Fünfton-Skala (griech. Pentatonik)

- Skalen aus fünf Tönen kennzeichnen seit etwa 3000 v. Chr. – vermutlich ausgehend von Mesopotamien – die Musik vieler indigener Völker Asiens, Afrikas, Amerikas und des frühen Europas.
- Sie gelten auch als Vorläufer der aus Griechenland stammenden europäischen Heptatonik.
- Viele Kinderlieder sowie Lieder in der Volksmusik, im Blues und im Jazz basieren auf der Pentatonik.
- Beispiel: schwarze Tasten auf dem Klavier, Pythagoräische Skala.

Siebenton-Skala (griech. Heptatonik)

- In der Heptatonik werden Tonleitern innerhalb einer Oktave aus sieben Tönen gebildet.
- Alle in der abendländischen tonalen Musik verwendeten diatonischen Tonleitern wie die Dur- und die Molltonleiter sind heptatonisch.

- Ein Spezialfall ist die **diatonische** Skala, die fünf Ganztonschritte und zwei Halbtonschritte enthält, wobei die beiden Halbtonschritte durch mindestens zwei Ganztonschritte entfernt sind. Die Zahlen geben die Anzahl Halbtonschritte an.
 - Bei der Dur-Tonart haben wir die Reihenfolge: 2 - 2 - **1** - 2 - **2** - **1**
 - Bei der natürlichen Moll-Tonart haben wir die Reihenfolge: 2 - **1** - 2 - 2 - **1** - **2** - **2**
 - Bei der harmonischen Moll-Tonart haben wir die Reihenfolge: 2 - **1** - 2 - 2 - **1** - **3** - **1**
 - Bei der melodischen Moll-Tonart haben wir die Reihenfolge: 2 - **1** - 2 - 2 - **2** - **2** - **1**
abwärts verläuft sie wie die natürliche Moll-Tonart
- Beispiel: C-Dur, die weissen Tasten des Klaviers (Start bei C).
- Beispiel: natürliches a-Moll, die weissen Tasten des Klaviers (Start bei A).

Zwölfton-Skala

- Diese Skala hat zwölf Töne pro Oktave.
- Beispiel: **Chromatische** Skala. Alle Tasten des Klaviers.

Ein wichtiges Kriterium bei der Auswahl der verwendeten Frequenzen ist dabei, dass die verwendeten Töne gut zueinander passen und für das menschliche Ohr angenehm klingen. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn das Verhältnis der Frequenzen durch kleine ganze Zahlen beschrieben werden kann.

Beispiele dafür sind die Oktave (Verhältnis 2:1), die Quint (3:2), Quarte (4:3), die grosse Terz (5:4) und die kleine Terz (6:5).

Andere

Wer sich für weitere Beispiel interessiert wird bei Link fündig (download Datei und App) ...

"MajorPentatonic"	"JazzMinor"	"Persian"
"MinorPentatonic"	"BluesScale"	"EastIndianPurvi"
"NeopolitanMajor"	"Chromatic"	"Oriental"
"NeopolitanMinor"	"Overtone"	"GagakuRyoSenPou"
"HungarianMajor"	"WholeTone"	"Zokugaku"
"HungarianMinor"	"Enigmatic"	"InSenPou"
"HungarianGypsy"	"Symmetrical"	"Okinawa"
"HarmonicMajor"	"Arabian"	"DiminishedWholeTone"
"HarmonicMinor"	"Balinese"	"EightToneSpanish"
"DoubleHarmonic"	"Byzantine"	"Prometheus"

Gleichmässig temperierte chromatische Stimmung und Klaviertasten

Im vorigen Abschnitt haben wir von den Tasten des Klaviers gesprochen. Zur Illustration seien diese Tasten aufgeführt.

27.500	30.863	32.703	36.708	41.203	43.654	48.999	55.000	61.735	65.406	73.416	82.407	87.307	97.999	110.00	123.47	130.81	146.83	164.81	174.61	196.00	220.00	246.94	261.63	293.66	329.63	349.23	392.00	440.00	493.88	523.25	587.33	659.26	698.46	783.99	880.00	987.77	1046.5	1174.7	1318.5	1396.9	1568.0	1760.0	1975.5	2093.0	2349.3	2637.0	2793.0	3136.0	3520.0	3951.1	4186.0
A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G	A	B	C

Abbildung Tastatur eines Klaviers: gleichmässig temperiert mit A4 = 440 Hz

Bemerkungen:

- Wichtig zur Festlegung der diskreten Frequenzen für die Tonleiter ist die **Oktave**: zwei Frequenzen, die in einem Verhältnis von 2:1 stehen, liegen eine Oktave auseinander.
- Wir verwenden für die Bezeichnung der Töne verschiedener Oktaven die wissenschaftliche Schreibweise (siehe Link für alternative Schreibweisen).
 - Das heisst für das tiefste A schreiben wir A0. Für Töne die eine Oktave darüber liegen schreiben wir nacheinander A1, A2, A3, ... bis A7.
 - Die Sequenz ist dann (für die weissen Tasten): A0, B0, C1, D1, E1, F1, G1, A1, B1, C2, D2, ...
- Von einem A zum nächsten A entspricht somit einer Oktave und beinhaltet 12 sogenannte **Halbtonschritte**.
- Bei der Dur Tonleiter werden die schwarzen Tasten mit -is bezeichnet.
 - C - Cis - D - Dis - E - F - Fis - G - Gis - A - Ais - B - C
- Bei der Moll Tonleiter werden die schwarzen Tasten mit -es bezeichnet.
 - C - Des - D - Es - E - F - Ges - G - As - A - B - B - C
- Eine Oktave (die Tasten am Rand des Intervalls werden nur einmal gezählt) umfasst 7 weisse Tasten und 5 schwarze Tasten: insgesamt also 12 Tasten.
- Die oben abgebildete Klaviertastatur enthält 7 Oktaven (von C bis B) und 3 weitere Tasten am linken Rand und 1 Taste am rechten Rand: insgesamt also 88 Tasten.
- Beim **gleichmässig temperiert gestimmten** Klavier ändert sich die Frequenz von der Taste zur nächsten um den gleichen Faktor $2^{\frac{1}{12}}$,
- denn ein musikalisches Intervall entspricht einem Frequenzverhältnis (und nicht einer Frequenzdifferenz) . Beispiel Oktave: Verhältnis = 2:1.
- Weil nach zwölf Schritten eine Oktave erreicht wird, gilt für das Frequenzverhältnis von zwei Halbtönen: $x^{12} = 2$.
- Somit ändert sich bei jedem Halbtonschritt die Frequenz um den Faktor $x = 2^{\frac{1}{12}} = 1.05946$.
- In der obigen Abbildung ist die **Grundfrequenz** das mittlere A (A4) und hat eine Frequenz von 440 Hz.
- Wir schreiben: $f_{A4} = 440$ Hz.
- Somit hat A5 (eine Oktave höher) die Frequenz: $f_{A5} = 2 * f_{A4} = 880$ Hz
- Und A3 (eine Oktave tiefer): $f_{A3} = \frac{1}{2} * f_{A4} = 220$ Hz usw.
- Und die schwarze Taste rechts von der Taste A4 hat die Frequenz $440 \text{ Hz} * 1.05946 = 466.164$ Hz
- Analog können die Frequenzen für alle weiteren Tasten festgelegt werden.

Zum besseren Verständnis des Folgenden müssen wir noch ein wenig weiter ausholen. Wir betrachten dazu eine einzige Oktave der Klaviertastatur.

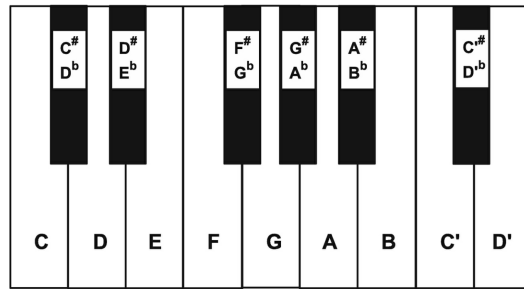


Abbildung Tastatur eines Klaviers.

Bei einer **diatonischen Skala** werden sieben Töne pro Oktave verwendet. Bei einer **Dur-Tonleiter** haben wir die folgende Reihenfolge an Halb- oder Ganzton-Schritten ...

ganz - ganz - **halb** - ganz - ganz - ganz - **halb**

Bei der C-Dur Tonleiter (engl. major scale) ist dies sehr einfach, da wir nur die weissen Tasten verwenden müssen.

C - D - E - F - G - A - B - C'

Bei der D-Dur Tonleiter wäre dies (wir schieben alle Töne um 2 Halbtöne nach oben) folgt ...

D - E - F# - G - A - B - C'##

Wir brauchen somit auch zwei schwarze Tasten.

Für die Intervalle gibt es die folgenden Bezeichnungen (die wir später noch brauchen werden):

- 0 Halbton: Prime (engl. unison)
- 1 Halbton: Kleine Sekunde (minor second)
- 2 Halbtöne: Grosse Sekunde (major second)
- 3 Halbtöne: Kleine Terz (minor third)
- 4 Halbtöne: **Grosse Terz** (major third)
- 5 Halbtöne: Quart (fourth)
- 7 Halbtöne: **Quint** (fifth)
- 8 Halbtöne: Kleine Sext (minor sixth)
- 9 Halbtöne: Grosse Sext (major sixth)
- 11 Halbtöne: Sept (seventh)
- 12 Halbtöne: **Oktave** (octave)

Insbesondere die Oktave, die Quint und die Grosse Terz spielen im Folgenden eine grosse Rolle bei der Festlegung der Frequenzen.

Bemerkung

- Die **natürliche Moll-Tonleiter** hat die folgende Reihenfolge für die 7 Schritte ...

ganz - **halb** - ganz - ganz - **halb** - ganz - ganz

- Beispielsweise: A - B - C - D - E - F - G - A (somit auch nur die weissen Tasten).
- Die Moll-Tonleiter wird als dunkler und melancholischer empfunden.
- Die Dur-Tonleiter wird als heller und lebendiger empfunden.

Wir untersuchen im Folgenden nun die Pythagoräische Stimmung und die Reine Stimmung. Dabei gilt, dass zwei Töne am besten zusammenpassen (Konsonanz), wenn ihre Frequenzen in einem Verhältnis von kleinen ganzen Zahlen stehen.

Pentatonik in pythagoräischer Stimmung

Die **pythagoräische Stimmung** (quintenreine Stimmung, engl. Pythagorean Tuning) ist ein System zur Bestimmung der Tonhöhen in der Musik, das aus den mathematischen Prinzipien von Pythagoras abgeleitet wurde. Diese Stimmung basiert auf der Verwendung von **reinen Quinten**, die durch das Frequenzverhältnis 3:2 beschrieben werden. Dies ist das einfachste Zahlenverhältnis nach der Oktave (2:1) und vor der Quart (4:3), der grossen Terz (5:4) und der kleinen Terz (6:5).

Siehe auch: [Link](#), [Link](#)

Wir starten mit dem Grundton C4 und verlangen, dass eine Quint (7 Halbtöne) jeweils ein Verhältnis von $\frac{3}{2}$ hat ...

(1)	$f_{F3} = f_{C4} / \frac{3}{2} = \frac{2}{3} f_{C4}$	für eine Quint tiefer
(2)	f_{C4}	Grundton
(3)	$f_{G4} = \frac{3}{2} f_{C4}$	1 Quint höher als C4
(4)	$f_{D5} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 f_{C4} = \frac{9}{4} f_{C4}$	2 Quinten höher als C4
(5)	$f_{A5} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 f_{C4} = \left(\frac{27}{8}\right) f_{C4}$	3 Quinten höher als C4
(6)	$f_{E6} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 f_{C4} = \left(\frac{81}{16}\right) f_{C4}$	4 Quinten höher als C4
(7)	$f_{B6} = \left(\frac{3}{2}\right)^5 f_{C4} = \left(\frac{243}{32}\right) f_{C4}$	5 Quinten höher als C4

In der **Pentatonik** enthält die Oktave 5 Töne. Wir betrachten die fünf Töne C, D, F, G und A pro Oktave. Wir reduzieren diese Töne auf die gleiche Oktave von C4 aus und erhalten ...

(2)	f_{C4}
	$f_{D4} = f_{D5} / 2 = \frac{9}{8} f_{C4}$
	$f_{F4}^{\text{Oktave}} = 2 * f_{F3} \stackrel{(1)}{=} 2 * \frac{2}{3} f_{C4} = \frac{4}{3} f_{C4}$
(3)	$f_{G4} = \frac{3}{2} f_{C4}$
	$f_{A4}^{\text{Oktave}} = \frac{1}{2} f_{A5} \stackrel{(5)}{=} \frac{1}{2} * \left(\frac{27}{8}\right) f_{C4} = \frac{27}{16} f_{C4}$

Zusammenfassend gilt für die Frequenzverhältnisse zum Grundton und zwischen den Tönen ...

Verhältnis	C4	D4	F4	G4	A4	C5
$\frac{f_i}{f_{C4}}$	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	2
$\frac{f_i}{f_{C4}} / \text{cent}$	0	204	498	702	906	1200
$\frac{f_{i+1}}{f_i}$		$\frac{9}{8}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{32}{27}$
$\frac{f_{i+1}}{f_i} / \text{cent}$		204	294	204	204	294

Wir stellen fest, dass verschiedene Intervalle nicht sehr konsonant tönen (wir haben grosse ganze Zahlen): beispielsweise ...

Intervall D-F (kleine Terz)	32/27
Intervall F-A (grosse Terz)	81/64

Ausserdem können wir feststellen ...

- Sieben Oktaven entsprechen $7 * 12 = 84$ Halbtönen.
- Ebenso entsprechen zwölf Quinten $12 * 7 = 84$ Halbtönen.
- Sieben Oktaven entsprechen einer Frequenzerhöhung um den Faktor $2^7 = 128$
- Zwölf Quinten entsprechen einer Frequenzerhöhung um den Faktor $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = \frac{531441}{4096} = 129.746$

- Das passt nicht zusammen. Dies entspricht einer Differenz von $1200 * \log_2 \left[\frac{129.746}{128} \right]$ cent = 23.46 cent, somit zirka einem Viertel Halbton.

Bemerkung

- Wenn wir alle fünf Töne um einen Halbton nach oben schieben, erhalten wir die schwarzen Tasten des Klaviers.
- Im Vergleich zur gleichmässig temperierten Stimmung, die die Oktave in gleichmässige Halbtöne unterteilt, verwendet die pythagoräische Stimmung natürliche Intervallverhältnisse. Dies führt zu einer anderen Klangfarbe, die als "reiner" empfunden wird, aber in manchen Fällen zu Problemen bei der Harmonie führen kann, wenn man die Tonart wechselt.
- Die pythagoräische Stimmung ist besonders in der mittelalterlichen und frühen Musik von Bedeutung und beeinflusst, wie bestimmte Melodien und Harmonien wahrgenommen werden. In der modernen Musik wird sie weniger verwendet, da die gleichmässig temperierte Stimmung mehr Flexibilität bietet, insbesondere beim Wechsel zwischen Tonarten.

Reine Stimmung

Tonleiter (7 Töne)

Siehe auch: Link, Link, Kuchling (Harmonische diatonische Tonleiter)

Die **Reine Stimmung** (engl. Just Tuning) ist ein musikalisches Stimmungssystem, das auf natürlichen Intervallverhältnissen basiert. Im Gegensatz zur gleichmässig temperierten Stimmung, bei der die Oktave in gleichmässige Halbtöne unterteilt wird, verwendet die Reine Stimmung harmonische Verhältnisse.

Sie legt einen grossen Wert darauf, dass die Frequenzverhältnisse kleine ganze Zahlen beinhalten für die **Quint** (3/2) und die **grosse Terz** (5/4). In der klassischen westlichen Musik sind dies die zentralen Intervalle (neben der Oktave natürlich).

Wir starten mit der Note C4 und erhalten direkt ...

- | | | |
|-----|---------------------------------|--------------------------|
| (1) | f_{C4} | |
| (2) | $f_{E4} = f_{C4} * \frac{5}{4}$ | Grosse Terz (4 Halbtöne) |
| (3) | $f_{G4} = f_{C4} * \frac{3}{2}$ | Quint (7 Halbtöne) |

Die Frequenzen der weiteren vier Töne erhalten wir durch folgende Intervalle/Sprünge ...

$C4 \rightarrow E4 \rightarrow A3 \rightarrow A4$	$f_{A4} = f_{C4} \frac{5}{4} / \frac{3}{2} * 2 = f_{C4} * \frac{5}{3}$
$A4 \rightarrow F4$	$f_{F4} = f_{A4} / \frac{5}{4} = f_{C4} * \frac{5}{3} / \frac{5}{4} = f_{C4} * \frac{4}{3}$
$C4 \rightarrow G4 \rightarrow D5 \rightarrow D4$	$f_{D4} = f_{C4} * \frac{3}{2} * \frac{3}{2} / 2 = f_{C4} * \frac{9}{8}$
$C4 \rightarrow E4 \rightarrow B4$	$f_{B4} = f_{C4} * \frac{5}{4} * \frac{3}{2} = f_{C4} * \frac{15}{8}$

Die Zahlenfaktoren bedeuten folgendes ...

$* \frac{5}{4}$ (Grosse Terz rauf), $* \frac{3}{2}$ (Quinte rauf), $* 2$ (Oktave rauf)
 $/ \frac{5}{4}$ (Grosse Terz runter), $/ \frac{3}{2}$ (Quinte runter), $/ 2$ (Oktave runter)

Wir erhalten als Ergebnis die Frequenzverhältnisse der Töne bezogen auf C sowie bezogen auf den tieferen Nachbarten ...

Note	C4	D4	E4	F4	G4	A4	B4	C5
$\frac{f_i}{f_{C4}}$	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
$\frac{f_i}{f_{C4}}/\text{cent}$	0	204	386	498	702	884	1088	1200
$\frac{f_{i+1}}{f_i}$		$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$
$\frac{f_{i+1}}{f_i}/\text{cent}$		204	182	112	204	182	204	112

Daraus folgen die wichtigen Intervalle bei der reinen Stimmung ...

Halbton	16/15	Quint	3/2
Ganzer Ton	10/9 und 9/8	Kleine Sexte	8/5
Kleine Terz	6/5	Grosse Sexte	5/3
Grosse Terz	5/4	Septime	15/8
Quart	4/3	Oktave	2

Leider ist dies aus mathematischen Gründen nicht immer einzuhalten.

Beispiel

Sie spielen die folgende Sequenz und möchten immer reine Intervalle spielen ...

D $\xrightarrow{\text{reine Quart}}$ G $\xrightarrow{\text{kleine Terz runter}}$ E $\xrightarrow{\text{reine Quart}}$ A $\xrightarrow{\text{Quint}}$ D

Die Note A wäre eine Quint über der Note D ...

$$f_A = f_D * \frac{4}{3} / \frac{6}{5} * \frac{4}{3} = f_D * \frac{40}{27} \quad \text{statt dem reinen } \frac{3}{2} f_D = \frac{40.5}{27} f_D$$

Der Faktor $\frac{40}{27}$ (die Verstimmung gegenüber der Quinte)

kommt immer wieder vor und heisst **Wolf's Quinte**.

Die Endfrequenz wäre dann für D ...

$$f_{D,\text{Ende}} = f_D * \frac{4}{3} / \frac{6}{5} * \frac{4}{3} * \frac{2}{3} = f_D * \frac{80}{81}$$

Die Note D am Ende ist nicht gleich der Note D am Anfang!

Der Faktor $\frac{80}{81}$ tritt auch immer wieder auf und heisst **syntonisches Komma**.

$\frac{80}{81}$ entspricht einem Intervall von -21.5 cent.

Bemerkung

- Da die Intervalle der Reinen Stimmung auf natürlichen Verhältnissen basieren, klingen **Akkorde** in diesem System besonders harmonisch und resonant.
- Die Reine Stimmung funktioniert am besten in Musik, die in einer einzigen Tonart bleibt, da die Intervallverhältnisse auf eine spezifische Grundfrequenz abgestimmt sind. Beim Wechseln zwischen Tonarten können Probleme auftreten, da die Verhältnisse nicht mehr perfekt passen, was zu "verstimmten" Intervallen führen kann.
- Die Reine Stimmung wird häufig in vokaler Musik und in bestimmten traditionellen Musikformen verwendet, wo die Reinheit der Harmonie von grosser Bedeutung ist. In der westlichen klassischen Musik wird sie hingegen weniger verwendet, da die gleichmässig temperierte Stimmung mehr Flexibilität bietet.
- In der Reinen Stimmung werden die Töne so gestimmt, dass die Intervalle zwischen ihnen den obertonreichen natürlichen Verhältnissen entsprechen, was zu einem besonders harmonischen und klaren Klang führt.

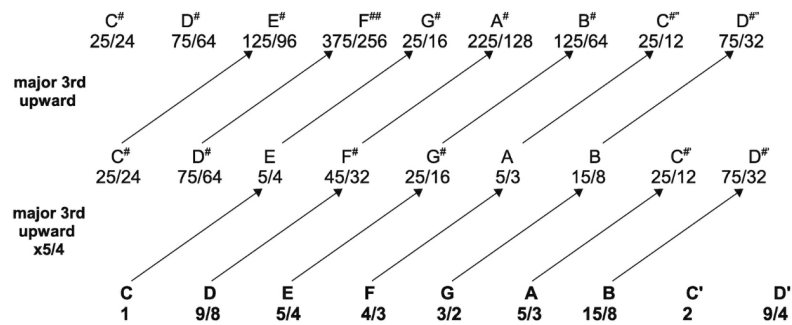
Reine chromatische Stimmung

Mit der besprochenen reinen Stimmung können die C-Dur und die A-Moll Tonleiter gespielt werden. Um diese Tonleiter mit ihren charakteristischen Abständen ganz-ganz-halb- usw. auch von anderen Grundtönen aus zu spielen, brauchen wir zusätzliche Halbtöne zwischen C/D, D/E, F/G, G/A, A/B.

Für die Dur-Tonart erhalten wir so die Töne (alle haben einen Halbton Abstand) ...

C - Cis - D - Dis - E - F - Fis - G - Gis - A - Ais - B - C

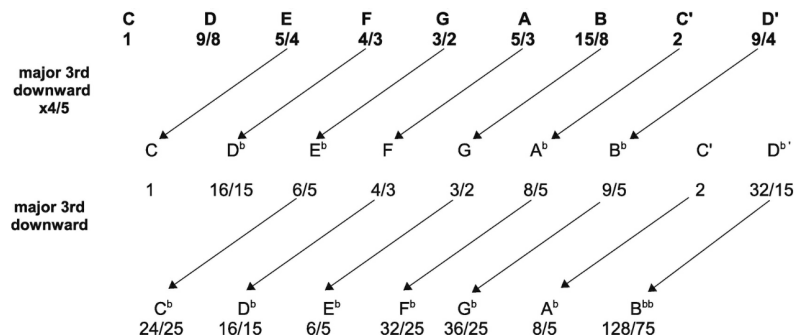
Diese werden mit Hilfe der grossen Terz (4 Halbtöne, Faktor 5/4) konstruiert. Wir gehen von der C-Dur Tonleiter um eine Terz nach oben und reduzieren auch wieder auf die gewünschte Oktave ...



In ähnlicher Weise werden die Halbtöne für die Moll-Tonleitern konstruiert. Nur geht man hier eine Terz nach unten.

Für die Moll-Tonart erhalten wir so die Töne (alle haben einen Halbton Abstand) ...

C - Des - D - Es - E - F - Ges - G - As - A - Bes - B - C



Die so konstruierten Halbtöne für die Dur- und Moll-Tonleitern sind nicht identisch, sie werden aber beim Klavier durch die gleiche Taste repräsentiert. Eine Geige kann jedoch entsprechend der Dur- oder Moll-Tonleiter gestimmt werden.

Das Frequenzverhältnis zwischen den kleineren Dur-Halbtönen und den Moll-Halbtönen beträgt $\frac{125}{128}$.

Beispielsweise ...

$$\frac{f_{\text{Ais}}}{f_{\text{Bes}}} = \frac{\frac{225}{128}}{\frac{9}{5}} = \frac{125}{128}$$

Dies bedeutet ein Intervall von ...

$$i = 1200 \text{ Cent} * \log_2 \left[\frac{125}{128} \right] = -41.0589 \text{ Cents}$$

also fast ein halbes Halbtonintervall für alle solchen is/es Paare.

Akkord

Ein musikalischer **Akkord** ist ein Klang, der aus mindestens drei Tönen besteht.

Wir erinnern uns an die Frequenzverhältnisse für C-Dur ...

C	D	E	F	G	A	B	C	D'	E'
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$

Für die folgenden Dreiklänge gilt ...

- C4 - E4 - G4 Wir haben das folgende Frequenzverhältnis: $1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2} = 4:5:6$
- F4 - A4 - C5 Wir haben das folgende Frequenzverhältnis: $\frac{4}{3} : \frac{5}{3} : 2 = 4:5:6$
- G4 - B4 - D5 Wir haben das folgende Frequenzverhältnis: $\frac{3}{2} : \frac{15}{8} : \frac{9}{4} = 4:5:6$

Wir sehen: Alle drei Akkorde bestehen aus einer grossen Terz (5:4) und einer kleinen Terz (6:5). Sie alle tönen auf Grund der Frequenzverhältnisse mit kleinen Zahlen sehr harmonisch.

Normstimmton

In den verschiedenen Tonleitersystemen werden nur die Frequenzverhältnisse angegeben. Für das Stimmen von Musikinstrumenten müssen aber auch die absoluten Frequenzen angegeben werden.

Die **internationale Stimmung** beruht auf dem Normstimmton (Kammerton genannt). Seine Frequenz wurde international festgelegt. Man geht von A4 aus und setzt ...

$$f_{A4} = 440 \text{ Hz}$$

Nicht alle Orchester bzw. Dirigenten verwenden den gleichen Normstimmton. In deutschen und österreichischen Sinfonieorchestern ist 443 Hz üblich, in der Schweiz 442 Hz (Link).

Bei der **physikalischen Stimmung** geht man von C4 aus und setzt ...

$$f_{C4} = 2^8 \text{ Hz} = 256 \text{ Hz}$$

Das A4 ergibt sich dann zu ...

$$f_{A4} = 256 \text{ Hz} * 2^{\frac{9}{12}} = 430.539 \text{ Hz}$$

Notenbild

Bedeutung verschiedener Symbole

Das Spielen eines Musikstücks bedingt jahrelanges Üben. Die Musiknoten sind dabei in einer passenden Notation gegeben. Im Folgenden wollen wir eine kleine Übersicht geben.

Das Notenbild eines Musikstücks hat beispielsweise folgendes Aussehen.



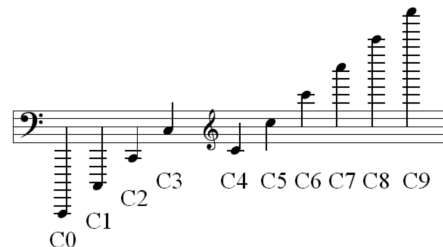
Abbildung Notenbild (aus Link)

Die einzelnen Zahlen in rot weisen auf die Notation hin ...

1. Bedeutet eine **Tempo**-Bezeichnung in italienischer Sprache und die genaue Metronom-Angabe: 142 Viertelschläge pro Minute.
2. Diese Angabe sagt aus, dass das Stück im **Dreiviertel-Takt** zu spielen ist (wie üblich für Walzer). Beim Dreivierteltakt ist die Betonung auf den Taktbeginn, die erste Note zu legen (1-2-3, 1-2-3). Ein Takt (Bereich zwischen zwei senkrechten Strichen) hat die Länge von drei Viertelnoten.
3. Der senkrechte Strich zeigt den Beginn des nächsten Taktes an.
4. Ganz links bei jeder Zeile steht der Notenschlüssel, hier der Violinschlüssel. Er zeigt an, welchem Ton (Frequenz) die Note entspricht, wenn sie auf oder zwischen den verschiedenen Linien liegt. Hier gilt: unterste Linie E4, oberste Linie F5.



Für tiefere Töne wird der Bassschlüssel verwendet (Link).



5. Die beiden Kreuze zeigen an, dass die Töne F und C in allen Oktaven einen Halbton höher, also als Fis und Cis zu spielen sind.
6. Das *mf* unter dem ersten Ton bedeutet mezzo forte (also mittellaut)
- 7/8. Die erste Note des nächsten Taktes ist durch einen Bogen mit den folgenden Noten Fis und A verbunden. Sie sollen deshalb mit dem ersten verbunden gespielt werden.
9. Im nächsten Takt folgt eine halbe Note (2 Viertelnoten): Dies wird dadurch gekennzeichnet, dass die Note innen weiss ist und einen Strich hat.
10. Um den Takt zu vervollständigen, folgt noch eine Viertelnote. Die zwei Notenköpfe zeigen an, dass sie gleichzeitig gespielt werden sollen. Der Staccato Punkt darüber bedeutet, dass die Note ganz kurz artikuliert werden soll.
11. Dies ist ein Pausenzeichen in der Länge eines Viertelschlages.
12. Unter den letzten drei Takten ist eine sogenannt Decrescendo-Gabel. Das heisst, dass die Lautstärke kontinuierlich abnehmen soll.

Dies ein kleiner Einblick in die Schreibweise der Musiknoten.

Frequenzbereich verschiedener Instrumente

Die Tasten auf dem Klavier umfassen den riesigen Frequenzbereich von 27 Hz - 4186 Hz.

Viele Instrumente haben einen bedeutend kleineren Bereich ...

Gitarre	E2 - E6	82 Hz - 1318 Hz
Sieben-Saiten-Gitarre	B1 - E6	62 Hz - 1318 Hz
Violoncello	C2 - A6	65 Hz - 1760 Hz
4-string Bass-Gitarre	E1 - E5	41 Hz - 659 Hz
Piano (Flügel)	A0 - C8	27 Hz - 4186 Hz
Piccoloflöte	C5 - C8	523 Hz - 4186 Hz
Violine (Geige)	G3 - E7	196 Hz - 2637 Hz
Mensch		80 Hz - 16'000 Hz

Abbildung Frequenzbereich einiger Musikinstrumente (Link)

Intervalle in Cents

Bislang haben wir (je nach Tonleiter) von bestimmten diskreten Frequenzen gesprochen: beispielsweise 12 Töne pro Oktave. Wenn wir die Frequenzen feiner unterteilen möchten, wird das Cent verwendet. Es ist folgendermassen definiert.

100 Cent = 1 Halbton

Da eine Oktave zwölf Halbtöne umfasst, gilt auch ...

1200 Cent = 1 Oktave

Allgemein ergibt sich die folgende Umrechnung von einem Frequenzverhältnis in ein Intervall ...

$$int = \log_2 \left[\frac{f_2}{f_1} \right] * 1200 \text{ Cent}$$

Die umgekehrte Rechnung von einem Intervall (in Cents) in ein Frequenzverhältnis ergibt sich dann zu ...

$$\frac{f_2}{f_1} = 2^{\left(\frac{int}{1200 \text{ Cent}}\right)} \quad \text{bzw.} \quad f_2 = f_1 * 2^{\left(\frac{int}{1200 \text{ Cent}}\right)}$$

Damit ergibt sich die folgende Tabelle für einige reine Intervalle ...

Intervall	Frequenzverhältnis	Intervall / cent
Oktave	2	1200.
Quint	$\frac{3}{2}$	701.955
Quart	$\frac{4}{3}$	498.045
grosse Terz	$\frac{5}{4}$	386.314
1 Cent	$2^{1/1200}$	1.

Man kann auch dem gesamten Frequenzbereich einer Skala feste Cent-Werte zuordnen. Dieses **absolute Cent** ist dann eine Masseinheit für die Tonhöhe, nicht die Intervallgrösse ...

$$f = 2^{\frac{i}{1200 \text{ Cent}}} \text{ Hz} \quad \text{und} \quad int = \log_2[f] * 1200 \text{ Cent}$$

Frequenz / Hz	Tonhöhe / cent
1	0.
2	1200.
5	2786.31
20	5186.31
50	6772.63
100	7972.63

Stimmen der Orchesterinstrumente

Die verschiedenen Instrumente eines Orchesters müssen aufeinander abgestimmt werden. Dies kann folgendermassen geschehen.

- Das Orchester gibt die Standardtonhöhe für das A4 vor: zumeist 440 Hz.
- Das Klavier bzw. der Konzertflügel wird vor dem Konzert gestimmt. Aus zeitlichen Gründen wäre es nicht möglich, alle 88-Tasten bzw. 230 Saiten zu stimmen. Das A4 hat dabei die vom Orchester vorgegebene Frequenz.
- Das Gleiche gilt für die Harfe mit ihren vielen Saiten.
- Dann gibt der Musiker mit der Oboe das A vor.
- Alle weiteren Instrumente (Blasinstrumente, Blechinstrumente, Pauken) werden auf diese Tonhöhe abgestimmt.
- Dann gibt die Oboe den A-Ton für die Saiteninstrumente vor.
- Zunächst wird die A-Saite und dann die weiteren 3 Saiten auf maximale Resonanz gestimmt.

Auf Grund von Temperaturschwankungen oder aus anderen Gründen müssen die Instrumente während des Konzerts gelegentlich noch nachjustiert werden.

Anhang

Anhang A Quellen

Hauptsächliche Quellen

Um sich schnellstmöglich ein Bild zu machen, wo die für das Kapitel “Akustik” relevanten Themen im **Kuchling** und in den beiden **Merkhilfen** gefunden werden können, ist in diesem Anhang eine Auflistung gegeben.

Verwendetes Buch ...

- Leon Gunther, “**The Physics of Music and Color: Sound and Light**”, 2019, 1063 Seiten

Als Quelle für die Experimente diene das Buch ...

- Helmut Hilscher (Herausgeber), “**Physikalische Freihandexperimente - Band 2 - Akustik, Wärme, Elektrizität, Magnetismus, Optik**”, 2018 (5. Auflage),

Interessante Ausführungen zu Signalverarbeitung und Fourier-Transformationen stehen im Buch ...

- Mariusz Jankowski, “**Signals, Systems, and Signal Processing: A Computational Approach**”

<https://www.wolfram-media.com/products/signals-systems-and-signal-processing/>

Das Buch ist auch gratis als Mathematica eBook erhältlich.

Viele weitere Quellen (insbesondere frei zugängliche Wikipedia Artikel) wurden direkt im Text integriert.

Zu bestimmten Themen (v.a. Übersichten) wurde auch die im Mathematica Notebook Assistant eingebaute KI eingesetzt.

H. Kuchling, “Taschenbuch der Physik”, 2022 (22. Auflage), 714 Seiten

Der für das Kapitel “Akustik” relevante Teil sind die folgenden Kapitel im Kuchling.

Kapitel 21	Schallerzeugung	Seite 336 - 342
21.1	Wesen des Schalls	
21.2	Schallquellen	
21.3	Tonleiter	
Kapitel 22	Schallausbreitung	Seite 343 - 350
22.1	Schallgeschwindigkeit	
22.2	Doppler-Effekt	
22.3	Überlagerung von Schallwellen	
Kapitel 23	Schallmessung	Seite 351 - 360
23.1	Schallfeldgrößen	
23.2	Hören	
Kapitel 24	Ultraschall	Seite 361 - 362
24.1	Eigenschaften	
24.2	Erzeugung von Ultraschall	

N. Marxer, “Physik Merkhilfe”, 2019, 55 Seiten

Auf den folgenden Seiten können die relevanten Inhalte zum Kapitel “Akustik” gefunden werden ...

Seite 22 - 23	Superposition (Interferenz)
Seite 24 - 25	Schwingende Saite
	Schwingende Luftsäule
	Schallgeschwindigkeit in Gasen
	Doppereffekt
	Schallfeldgrößen
	Schallpegel
	Lautstärkepegel

Anhang B Experimente und (Musik)Geräte

Zusätzlich zu den im Text erwähnten Experimenten sind hier noch weitere Experimente aufgeführt.

Slinky

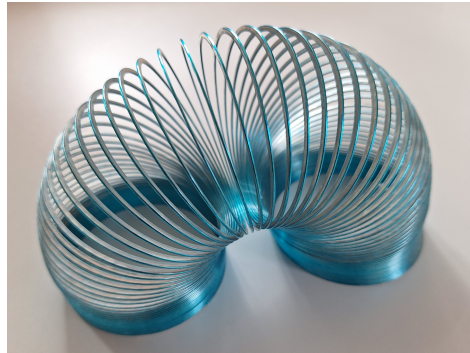


Abbildung Slinky

Wir stellen fest:

- Durch kurzzeitiges Auslenken der Feder entsteht ein Puls, der mit konstanter Geschwindigkeit entlang der Feder propagiert.
- Wir können sowohl Longitudinal- als auch Transversalwellen erzeugen.
- Bei Reflexion am festen oder am losen Ende wird der Puls mit einer entsprechenden Phasenverschiebung reflektiert.

Ausserdem sehen wir:

- Wenn eine kontinuierliche (harmonische) Anregungen mit der entsprechenden Frequenz erfolgt, entsteht eine stehende Welle.
- Durch schnellere Anregung können auch Oberschwingungen angeregt werden.
- Anregung mit der Eigen- bzw. Resonanzfrequenz führt zu sehr grossen Amplituden.

Doppler-Effekt

Rohr



Abbildung Durch Rotation des Rohrs entsteht ein akustisches Signal

Wir stellen fest:

- Durch Schwingen des Rohrs entsteht ein akustisches Signal.
- Schnelleres Schwingen führt zu einem höherfrequenten Signal (Oberton)
- Siehe auch Link.

phyphox Experimente im Bereich Akustik

Mit Hilfe der App “phyphox” lassen sich die folgenden Experimente im Bereich Akustik durchführen (vgl. Anhang C):

- **Audio Amplitude:** Ermittelt die Amplitude von Audio-Signalen.
- **Audio Autokorrelation:** Ermittelt die Frequenz eines einzigen Tones.
- **Audio Oszilloskop:** Stellt Audioaufnahmen dar.
- **Audio Spektrum:** Zeigt das Frequenz-Spektrum von Audiosignalen.
- **Doppler-Effekt:** Misst kleine Frequenzänderungen des Doppler-Effekts.
- **Frequenz-Verlauf:** Ermittelt den Frequenzverlauf eines einzelnen Tons.
- **Sonar:** Misst Entfernungen mit Hilfe von Echos und der Schallgeschwindigkeit.
- **Tongenerator:** Generiert einen Ton einer bestimmten Frequenz. (siehe unten)
Durch Schwingen des Tongenerators kann der Doppler-Effekt veranschaulicht werden.

Ausserdem kann mit Hilfe der akustischen Stoppuhr die **Schallgeschwindigkeit** in Luft bestimmt werden. Dazu werden zwei Smartphones benötigt.

phyphox Frequenzgenerator / Doppler Effekt

Mit der phyphox-App kann ein Signal erzeugt werden.

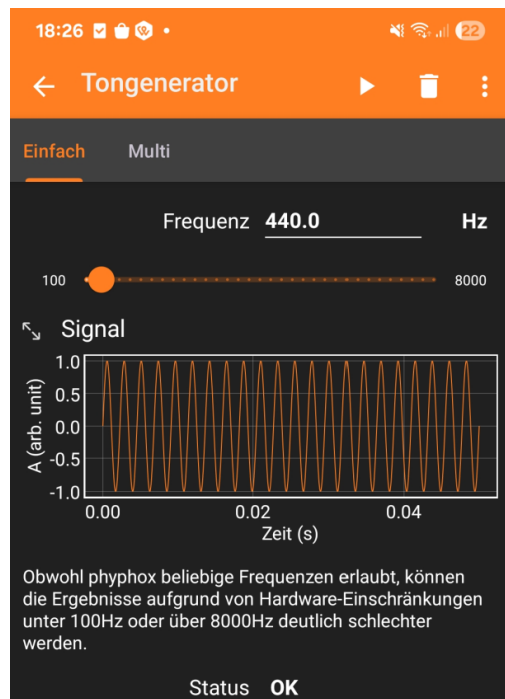


Abbildung phyphox App “Tongenerator”

Durch Schwingen des Smartphones über dem Kopf kann der Doppler-Effekt gezeigt werden: Die Frequenz des Tons nimmt periodisch zu und ab.

Schwingende Körper

Drehorgel

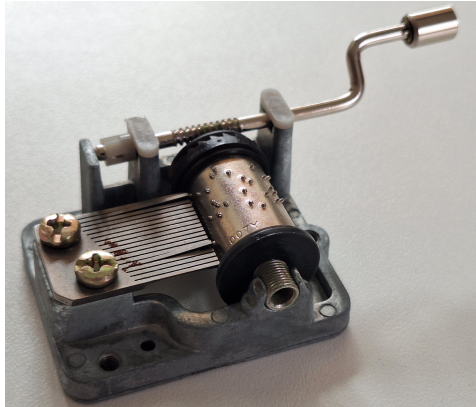


Abbildung Musikorgel "Happy Birthday"

Wir stellen fest:

- Durch Drehen der Orgel werden die Stäbe der Reihe nach ausgelenkt und zum kurzzeitigen Schwingen gebracht.
- Auf Grund der unterschiedlichen Länge der Stäbe variiert die Tonhöhe der einzelnen schwingenden Stäbe.

Stimmgabel



Abbildung Stimmgabel (Link)

Wir stellen fest:

- Mit einem Resonanzkörper tönt die Stimmgabel viel lauter.
- Die Stimmgabel führt Eigenschwingungen konstanter Frequenz aus.
- Bei zwei Stimmgabeln (eine davon durch Anbringen eines kleinen Gewichts leicht verstimmt) können wir die Überlagerung der Schallwellen (Schwebung) beobachten.

Elektroinstrumente

Elektropiano



Abbildung Elektrische Kinderorgel

Wir stellen fest:

- Die C-Dur Tonleiter umfasst die weissen Tasten von C bis C'
- Die A-Moll Tonleiter umfasst die weissen Tasten von A bis A'
- Oktaven, Quinten, Quarten, grosse und kleine Terz tönen schön harmonisch.
- Die Dreiklänge C-E-G, F-A-Fis und G-B-D tönen auch sehr harmonisch.

Saiteninstrumente

Gitarre



Wir stellen fest:

- Die Saiten haben alle die gleiche Länge.
- Die Saiten sind auf eine bestimmte Tonhöhe gestimmt: E2 - A2 - D3 - G3 - B3 - E4
- Für die Grundschiwingung gilt ...
 - Die dünneren Saiten (kleineren Querschnitt) haben eine höhere Frequenz.
 - Die Nylonseiten haben eine höhere Frequenz als die Stahlsaiten.
- Durch Erhöhen der Saitenspannung kann die Wellengeschwindigkeit und damit (gemäss $c = \lambda f$) bei gleicher Wellenlänge/Saitenlänge auch die Frequenz erhöht werden.



- Diese Beobachtungen lassen sich gut mit der Formel $c = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ für die Wellengeschwindigkeit einer Transversalwelle in einem Festkörper erklären.
- Wir können die Formel $l_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{12}} * l_0$ für die Saitenlänge beim Drücken auf den n -ten Steg kontrollieren.
- Wir können die beiden Methoden, um die Gitarre zu stimmen (s. unten) untersuchen.

Länge der Saiten

Bei der Gitarre kann durch Drücken auf den Steg die Länge der Saiten verkürzt und damit die Frequenz erhöht werden.

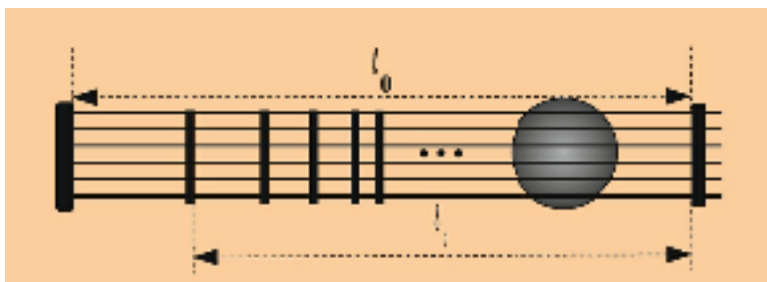


Abbildung Die verschiedenen Längen der Saiten bei der Gitarre.

Wenn die Gitarrensaite für den Grundton die Länge l_0 hat, dann hat sie (bei wohltemperierter Stimmung) für die anschliessenden Halbtöne die Länge ...

$$l_n = \frac{l_0}{2^{\frac{n}{12}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{12}} * l_0$$

Die Längen nehmen mit einer Exponentialfunktion ab.

Das heisst beispielsweise bei $l_0 = 66$ cm für die verschiedenen Längen l_n ...

Steg Nummer n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Länge l_n /cm	66.	62.3	58.8	55.5	52.4	49.4	46.7	44.	41.6	39.2	37.

Mögliche Frequenzen

Mit den einzelnen Saiten können die folgenden Töne gespielt werden ...

Gitarren-Griffbrett mit Noten

Dieses sind die Noten auf dem Griffbrett der Gitarre. Alle Noten wiederholen sich nach dem Ende vom 12. Bund (Fret). B = H auf deutsch.

Bund	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
E4	F4	F#4	G4	G#4	A4	A#4	B4	C5	C#5	D5	D#5	E5	F5	F#5	G5	G#5
B3	C4	C#4	D4	D#4	E4	F4	F#4	G4	G#4	A4	A#4	B4	C5	C#5	D5	D#5
G3	G#3	A3	A#3	B3	C4	C#4	D4	D#4	E4	F4	F#4	G4	G#4	A4	A#4	B4
D3	D#3	E3	F3	F#3	G3	G#3	A3	A#3	B3	C4	C#4	D4	D#4	E4	F4	F#4
A2	A#2	B2	C3	C#3	D3	D#3	E3	F3	F#3	G3	G#3	A3	A#3	B3	C4	C#4
E2	F2	F#2	G2	G#2	A2	A#2	B2	C3	C#3	D3	D#3	E3	F3	F#3	G3	G#3

Abbildung Gitarren-Griffbrett (Link)

Wenn die Saiten so gestimmt sind, dass die Frequenzen benachbarter Saiten reine Intervalle sind (4 Quarten, 1 grosse Terz), dann besteht zwischen der E2 Saite und der E4 Saite, die zwei Oktaven auseinanderliegen, das Frequenzverhältnis 3.95062 (statt 4) und das Intervall hat 2378 cent (statt 2400), denn ...

$$\left(\frac{4}{3}\right)^4 * \left(\frac{5}{4}\right) = 3.95062$$

Gitarre stimmen mit Hilfe der Schwebung

Heutzutage werden die Gitarren meistens mit Hilfe von elektronischen Hilfsmitteln gestimmt. Früher benutzte man u.a. die Schwebung zum Stimmen der Gitarre.

Wenn wir zwei harmonische Wellen überlagern erhalten wir gemäss der Formel aus der Mathematik ($\sin[\alpha] + \sin[\beta] = 2 \sin\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\right] \cos\left[\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$) ...

$$\sin[\omega_1 t] + \sin[\omega_2 t] = 2 \sin\left[\frac{\omega_1+\omega_2}{2} t\right] \cos\left[\frac{\omega_1-\omega_2}{2} t\right]$$

einen Ton mit der durchschnittlichen Kreisfrequenz $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ der beiden Töne, der mit der kleineren Kreisfrequenz $\omega_1 - \omega_2$ auf- und abschwelt. Der Faktor 2 ist herausgefallen, weil die Cosinus-Funktion $\cos\left[\frac{\omega_1-\omega_2}{2} t\right]$ die Umhüllende gibt und das An- und Abschwellen in einer halben Periode erfolgt (siehe Abbildung).

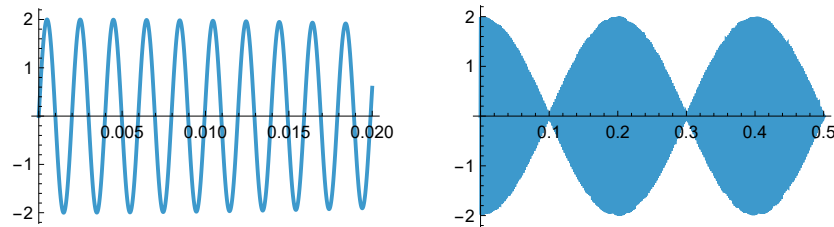


Abbildung $\sin[\omega_1 t] + \sin[\omega_2 t]$ für die Frequenzen $f_1 = 500$ Hz und $f_2 = 505$ Hz
 Links Bereich für t von 0 bis 0.02 Sekunden, Schwingung mit $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$
 Rechts Bereich für t von 0 bis 0.5 Sekunden, Schwingung mit $\omega_1 - \omega_2$

Das Stimmen mit Hilfe der Schwebung beruht nun auf den folgenden Tatsachen ...

- Wenn die Differenz von $f_1 - f_2 > 20$ Hz ist, hört man einen tiefen Ton.
- Wenn die Differenz von $f_1 - f_2 < 20$ Hz ist, hört man ein An- und Abschwellen des Tons mit der Frequenz $f_1 - f_2$.
- Wenn die Differenz gleich 0 Hz ist (was man erreichen möchte), dann ist das An- und Abschwellen verschwunden.

Nun zum Stimmen der Gitarre: Ausgangspunkt ist die A2 Saite, die zuerst gestimmt werden muss: zum Beispiel mit Hilfe einer Stimmgabel.

Dem Griffbrett oben kann man entnehmen, dass man durch Drücken der Saite E2 am fünften Bund den Ton A2 erzeugen kann. Wenn diese Frequenz von der Frequenz der Saite A2 (leicht) abweicht hört man eine Schwebung - einen kontinuierlich auf- und abschwellenden Ton. Durch Ändern der Saitenspannung kann die Frequenz verändert werden. Dies wird so lange gemacht, bis die Schwebung verschwindet und damit beide Schwingungen die gleiche Frequenz haben. Dieses Vorgehen wird wiederholt mit der D3-Saite und dem 5. Bund der A2-Saite, der G3-Saite und dem fünften Bund der D3-Saite, der B3-Saite und dem 4. Bund der G3-Saite und schlussendlich der E4-Saite und dem 5. Bund der B3-Saite.

Gitarre stimmen mit Hilfe der Flageolettöne

Eine andere Methode besteht in der Verwendung der Flageolettöne (Link). Im Gegensatz zum festen Greifen (Verkürzung der schwingenden Länge der Saite) schwingt beim Flageolett bzw. der Flageolett-technik die Saite als Ganzes, also auch „hinter“ dem Finger.

Flageolettöne sind Obertöne, die zu Stande kommen, wenn durch leichtes Berühren der Saite am geeigneten Bund des Griffbretts Obertöne der Saite angeregt werden. Wenn beispielsweise an der Stelle $\frac{1}{3}$ der E2 Saite die Saite nur berührt wird (dies führt dazu, dass sich hier ein Knoten befindet) resultiert die dritte harmonische Schwingung.

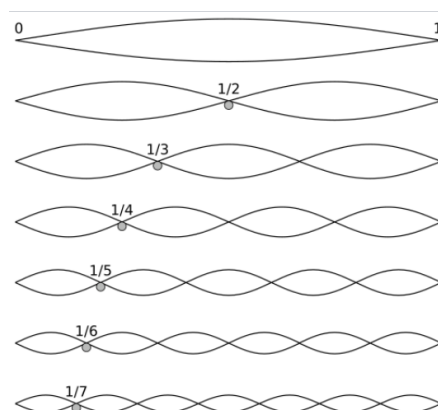
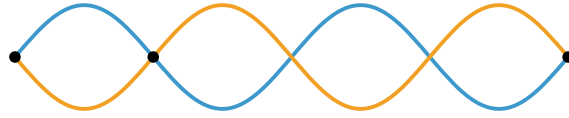


Abbildung Entstehung von Flageolettönen (Link)

Auf welchem Bund ist diese Stelle? Wir wissen, dass ...

- der **fünfte Bund** eine Quart (5 Halbtöne höher) erzeugt. Eine Quart bedeutet eine Frequenzvergrößerung um den Faktor $\frac{4}{3}$, was einer Verkleinerung der Saite auf $\frac{3}{4}$ der ursprünglichen Länge L entspricht. Auf der einen Seite des Fingers hat die Saite eine Länge $\frac{1}{4} L$ und auf der anderen eine Länge von $\frac{3}{4} L$. Die Grundschwingung, die hier hineinpasst hat eine vierfache Frequenz. Somit hat der Flageoletton eine **4-fache** Frequenz (plus Harmonische).



- Wir wissen auch, dass der **siebte Bund** (sieben Halbtöne höher) eine Quint ($\frac{3}{2}$) erzeugt. Die gleiche Überlegung führt dazu, dass das Berühren am siebten Bund zu einer Aufteilen $\frac{1}{3} L$ zu $\frac{2}{3} L$ führt und somit der Flageoletton eine **3-fache** Frequenzerhöhung bewirkt.



Wir haben somit die folgenden Flageolettpaare für die einzelnen Gitarrensaiten zum Stimmen ...

	Grundsaite	Flageolett 5. Bund	Flageolett 7. Bund
E2	1	4	3
A2	$\left(\frac{4}{3}\right)$	$4 \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3}$	$3 \left(\frac{4}{3}\right) = 4$
D3	$\left(\frac{4}{3}\right)^2$	$4 \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{64}{9}$	$3 \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{3}$
G3	$\left(\frac{4}{3}\right)^3$	$4 \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{256}{27} = 9.48148$	$3 \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{9}$
B3	$\frac{5}{4} \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2.96296$	$4 \left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{320}{27}$	$3 \left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{80}{9} = 8.88889$
E4	$\frac{5}{4} \left(\frac{4}{3}\right)^4$	$4 \left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{1280}{81}$	$3 \left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{320}{27}$

Tabelle Frequenzen der verschiedenen Flageoletttöne

Wir sehen aus dieser Tabelle, welche Saiten und Berührungspunkte die gleiche bzw. fast die gleiche Frequenz haben sollten. Dies legt auch nahe, wie nacheinander die Saiten A2 (Stimmgabel) → D3 → G3, dann A2 → E2 ^{ungenau} → B3 → E4 gestimmt werden können. Das Stimmen der B3 Saite (mit E2) ist nicht ganz exakt. Es gibt eine Abweichung von $1200 * \log_2 \left[\frac{3}{2.96296} \right] = 21.5$ cent.

$$\begin{array}{lcl} \text{A2 (5. Bund)} & = & \text{D3 (7. Bund)} \\ \text{D3 (5. Bund)} & = & \text{G3 (7. Bund)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{A2 (7. Bund)} & = & \text{E2 (5. Bund)} \\ \text{E2 (7. Bund)} & \approx & \text{B3 (Grundsaite)} \\ \text{B3 (5. Bund)} & = & \text{E4 (7. Bund)} \end{array}$$

Geige



Abbildung Geige

Eine Geige hat im Gegensatz zu einer Gitarre keinen Bund, d.h. keine Unterteilung des Griffbretts quer zu den Saiten. Dadurch muss der Geiger die Töne mit Hilfe des Gehörs treffen. Dies hat aber auch den Vorteil, dass der Geiger die Tonhöhen/Stimmungen sehr präzise anpassen kann.

Monochord

Untenstehend ist ein Gerät (Mehrere Monochords mit gemeinsamen Resonanzkasten) abgebildet, mit dessen Hilfe sich die wohlklingenden Quinten, Quarten usw. bilden lassen.



Abbildung Monochords zum Experimentieren im Technorama Winterthur.

Blasinstrumente

Blockflöte



Abbildung Blockflöte

Die Blockflöte (engl. recorder; das englische Wort flute bedeutet Querflöte) hat folgende Eigenschaften (Link):

- Die Luftsäule im Instrument wird durch den Spieler am Mundstück zu Schwingungen angeregt.
- Ein flach geformter Luftstrom (Luftblatt) trifft auf eine Anblaskante und gerät dort ins Schwingen.
- Durch das Schliessen verschiedener Tonlöcher wird die Länge der schwingungsfähigen Luftsäule festgelegt (siehe Griffabelle unten) und damit die Tonhöhe festgelegt.
- Der tiefste Ton entsteht, wenn alle Tonlöcher geschlossen sind.
- Neben der Grundschiwingung gibt es auch Obertöne.
- Durch stärkeres Anblasen (Überblasen) kann eine höhere Harmonische angeregt werden.

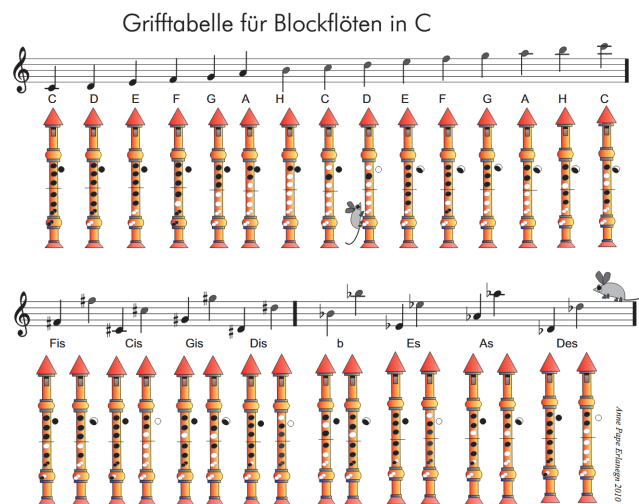


Abbildung Griffabellen für Blockfläten in C (Link)

Vogelpfeife



Abbildung Vogelpfeife

Durch Hineinblasen kommt die Luft im Inneren zum Schwingen, und es entsteht ein Ton.

Vuvuzela



Abbildung Vuvuzela

Das Instrument besteht aus einer konischen Röhre. Sie tönt sehr laut und kann direkt am Schalltrichter 130 dB erreichen.

Bei der FIFA Weltmeisterschaft 2010 in Südafrika wurden die Vuvuzelas von den Zuschauern sehr stark eingesetzt. Die UEFA verhängte daraufhin ein Vuvuzela Verbot für die Spiele unter ihrer Aufsicht (nicht jedoch die FIFA).

Diverse Musikinstrumente

Weitere Musikinstrumente, deren Funktionsweise in anderen Situationen schon beschrieben wurde.



Abbildung Trommel



Abbildung Metallophon



Abbildung Xylophon



Metallophon



Abbildung Links: Klingende Metallstäbe mit Kokosnuss als Resonator
Rechts: Donnertrommel

Anhang C phyphox Experimente

Beschreibung

Die Applikation "phyphox" (siehe Link) ist eine App, die sowohl auf Android als auch auf iPhone smart phones läuft. Die App ermöglicht es, ...

- die im smart phone vorhandenen **Sensoren** für Experimente zu benutzen (Link),
- die aufgenommenen Daten für andere Anwendungen zu **exportieren** (Link),
- die Experimente **fernzusteuern** (Link),
- vorhandene Experimente anzupassen oder eigene Experimente mit Hilfe eines **web-editors** zu programmieren (Link).

Sensoren

Phyphox kann die folgenden Sensoren verwenden ...

- Accelerometer
- Magnetometer
- Gyroscope
- Light sensor
- Pressure
- Proximity sensor
- Microphone
- GPS/Location
- Bluetooth for custom devices (for example an Arduino)*

und neuerdings auch die Kamera.

Ausgabe

Phyphox kann die folgenden Ausgabegeräte einsetzen ...

- Speaker
- Bluetooth for custom devices (for example an Arduino)*

Phyphox Experimente

Phyphox hat die folgenden Experimente implementiert ...

Sensoren	
	Beschleunigung (ohne g) Rohdaten des Sensors "lineare Beschleunigung" aus...
	Beschleunigung mit g Rohdaten des Beschleunigungssensors auslesen. D...
	Gyroskop (Drehrate) Rohdaten des Gyroskops auslesen.
	Licht Rohdaten des Lichtsensors auslesen.
	Luftdruck Rohdaten des Barometers auslesen.
	Magnetfeld Rohdaten des Magnetometers auslesen.
	Standort (GPS) Positionsdaten der satellitengestützten Navigation...

Akustik	
	Audio Amplitude Ermittelt die Amplitude von Audio-Signalen.
	Audio Autokorrelation Die Frequenz eines einzelnen Tons ermitteln.
	Audio Oszilloskop Stellt Audioaufnahmen dar.
	Audio Spektrum Zeigt das Frequenz-Spektrum von Audiosignalen.
	Dopplereffekt Kleine Frequenzänderungen des Dopplereffekts me...
	Frequenz-Verlauf Den Frequenzverlauf eines einzelnen Tons ermitteln.
	Sonar Misst Entfernungen mithilfe von Echos und der Sch...
	Tongenerator Generiert einen Ton einer bestimmten Frequenz.

Alltag	
	Applausmeter Bewertet einen Applaus nach Lautstärke und Dauer.
	Aufzug Bestimmt Höhe und Geschwindigkeit eines Aufzugs...

Kamera	
	Farbe (Farbwert Sättigung Hellwert / ... Bestimme die Farbe im HSV-Farbmodell (Farbwert,...
	Helligkeit (Leuchtdichte) Miss die Leuchtdichte, also die Helligkeit durch die...
	Kamera-Spektrum: Helligkeit Zeigt das Frequenz-Spektrum schwankender Hellig...
	Kamera-Stoppuhr: Farbe Miss die Zeit zwischen Faränderungen, z.B. verursa...
	Kamera-Stoppuhr: Helligkeit Miss die Zeit zwischen Helligkeitsänderungen, z.B....
	Tiefensensor (LiDAR / ToF) Miss Entfernungen mit dem Tiefensensor.

Mechanik	
	(In)elastischer Stoß Bestimme den Energieverlust während des (in)elast...
	Fadenpendel Misst die Erdbeschleunigung ($g=9.81\text{ m/s}^2$) indem d...
	Federpendel Misst die Frequenz und Periode eines Federpendels.
	Rolle Bestimmt die Geschwindigkeit einer Rolle, in der da...
	Zentripetalbeschleunigung Stellt die Zentripetalbeschleunigung als Funktion de...

Werkzeuge	
	Beschleunigungs-Spektrum Zeigt das Frequenz-Spektrum des Beschleunigungs...
	Magnet-Lineal Mit einer Reihe von Magneten die zurückgelegte Ent...
	Magnetfeld-Spektrum Zeigt das Frequenz-Spektrum des Magnetometers.
	Neigung Miss den Neigungswinkel des Smartphones.

Zeitmessung	
	Akustische Stoppuhr Stoppe die Zeit zwischen zwei akustischen Ereignis...
	Bewegungs-Stoppuhr Stoppe die Zeit zwischen zwei Bewegungs-Ereignis...
	Näherungs-Stoppuhr Miss Zeiten mittels des Näherungssensors.
	Optische Stoppuhr (Lichtsensor) Miss Zeiten mittels des Lichts, das auf den Lichtsen...

Anhang D Mathematik - Fourier Transformation

Einleitung

Die **Fourier-Transformation (FT)** ist ein mathematisches Verfahren, das eine Funktion von der Zeitdomäne t in die Frequenzdomäne f oder ω überträgt. Sie wurde von Joseph Fourier (1768 - 1830, Link) entwickelt und ist ein grundlegendes Werkzeug in vielen Wissenschafts- und Ingenieurbereichen, das es ermöglicht, komplexe Signale zu analysieren und zu verarbeiten, indem sie in ihre Frequenzkomponenten zerlegt werden. Diese Zerlegung nennt man auch **Spektralanalyse**.

In unserer Vortragsreihe werden wir in mehreren Situationen auf solche Spektren treffen ...

- Atomphysik: Übergänge zwischen verschiedenen Energieniveaus liefern ein für das Element charakteristisches Spektrum.
- Doppereffekt: Wenn ein bewegter Sender ein Signal aussendet wird auf Grund des Doppler-Effekts die Frequenz des Signals verändert.

Spektren können sowohl experimentell erzeugt werden wie bei ...

- Aufspaltung des Lichts durch ein Prisma auf Grund der Brechung am Übergang Luft/Glas.
- Aufspaltung des Lichts durch ein Gitter auf Grund der Beugung an den Spalten eines Gitters.

Das Spektrum kann auch aus dem zeitlichen Verlauf des Signals berechnet werden.

Beispielsweise kann ein **kontinuierliches periodisches** Signal $f[t]$ mit der Periode 2π in eine Summe von Sinus und Cosinus Funktionen mit diskreten Frequenzen 1, 2, 3, usw. zerlegt werden ...

$$\begin{aligned} f[t] &= a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos[i t] + b_i \sin[i t]) \\ &= a_0 + a_1 \cos[t] + a_2 \cos[2 t] + a_3 \cos[3 t] + \dots + b_1 \sin[t] + b_2 \sin[2 t] + b_3 \sin[3 t] + \dots \end{aligned}$$

In diesem Beispiel wurde das Signalt $f[t]$ in Cosinus und Sinus-Funktionen zerlegt. Es gibt jedoch auch noch eine komplexe Schreibweise. Sie ist mathematisch eleganter und vereinfacht viele Berechnungen.

Die Fourier-Transformation für ein **kontinuierliches nicht-periodisches** Signal $f[t]$ führt auf ein Integral und ergibt das folgende Spektrum $F[\omega]$...

$$F[\omega] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f[t] e^{j\omega t} dt$$

Historische Entwicklung der Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation hat eine faszinierende historische Entwicklung, die über mehrere Jahrhunderte reicht. Hier ist eine kurze Zusammenfassung ihrer Entwicklung ...

18. Jahrhundert - Joseph Fourier

Die Fourier-Transformation verdankt ihren Namen dem französischen Mathematiker Joseph Fourier. In den frühen 1800er Jahren entwickelte Fourier die Idee, dass jede periodische Funktion als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen dargestellt werden kann. Dies war ursprünglich Teil seiner Arbeit zur Analyse der Wärmeleitung.

1822 - Publikation der Theorie

Fourier veröffentlichte seine Ideen in seinem Werk "Théorie analytique de la chaleur" (1822), in dem er die mathematischen Grundlagen der Fourier-Reihen darlegte. Diese Arbeit legte den Grundstein für die Fourier-Transformation.

19. Jahrhundert - Weiterentwicklung durch Mathematiker

Im Laufe des 19. Jahrhunderts wurde Fouriers Arbeit von anderen Mathematikern weiterentwickelt. Insbesondere Dirichlet und Riemann trugen zur Formalisierung und Verallgemeinerung der Fourier-Reihen bei.

20. Jahrhundert - Integration in die Signalanalyse

Im 20. Jahrhundert wurde die Fourier-Transformation zu einem zentralen Werkzeug in der Signalanalyse, insbesondere in der Elektrotechnik, Physik und angewandten Mathematik. Die Entwicklung der schnellen Fourier-Transformation (FFT) in den 1960er Jahren machte die Berechnung von Fourier-Transformationen effizienter und ermöglichte ihre Anwendung in der digitalen Signalverarbeitung.

Moderne Anwendungen

Heute wird die Fourier-Transformation in einer Vielzahl von Bereichen eingesetzt, darunter Audiotechnik, Bildverarbeitung, Quantenphysik und Datenanalyse. Sie ist ein unverzichtbares Werkzeug für die Analyse und Verarbeitung von Signalen und Daten.

Die Fourier-Transformation hat sich von einem theoretischen Konzept zu einem praktischen Werkzeug entwickelt, das in vielen wissenschaftlichen und technischen Bereichen von entscheidender Bedeutung ist.

Anwendungen

Die Fourier-Transformation hat viele Anwendungen. Insbesondere in ...

- Signalverarbeitung
 - Audiosignale: Analyse und Verarbeitung von Musik und Sprache, z.B. für Equalizer und Audioeffekte.
 - Bildverarbeitung: Kompression und Rauschunterdrückung in Bildern und Videos.
 - Telekommunikation: Modulation und Demodulation von Signalen zur Datenübertragung.
- Physik
 - Quantenmechanik: Analyse von Wellenfunktionen und Spektren.
 - Optik: Untersuchung von Beugungs- und Interferenzmustern.
 - Akustik: Analyse von Schallwellen und deren Frequenzspektren.
- Elektrotechnik
 - Schaltungstheorie: Analyse von elektrischen Schaltungen im Frequenzbereich.
 - Filterdesign: Entwicklung von Hoch-, Tief- und Bandpassfiltern.
- Medizin
 - Bildgebende Verfahren: Verbesserung von Röntgen-, MRT- und CT-Bildern.
 - EEG und EKG: Analyse von bioelektrischen Signalen für die Diagnose.
- Wirtschaft und Finanzen
 - Zeitreihenanalyse: Untersuchung von Finanzdaten zur Erkennung von Mustern und Trends.
 - Risikomanagement: Analyse von Schwankungen und Volatilität in Märkten.
- Ingenieurwissenschaften
 - Schwingungsanalyse: Untersuchung von mechanischen Schwingungen und Resonanzen.
 - Systemidentifikation: Bestimmung von Systemparametern aus Eingang-Ausgang-Daten.

- Geowissenschaften
 - Seismologie: Analyse von Erdbebenwellen zur Erkundung von Erdstrukturen.
 - Fernerkundung: Verarbeitung von Satellitendaten zur Analyse von Erdoberflächen.
- Datenanalyse und Maschinelles Lernen
 - Feature Extraction: Gewinnung von Merkmalen aus Daten für Analyse und Klassifikation.
 - Anomalieerkennung: Erkennung von Abweichungen in Datenströmen.

Wir sehen, die Fourier-Transformation ist ein sehr wichtiges Werkzeug.

Unterschiedliche Konventionen bei der Fourier-Transformation

Die mathematische Darstellung der Fourier-Transformation ist nicht einheitlich. Je nach Anwendungsgebiet hat sich eine andere Darstellung etabliert. Seien Sie deshalb nicht überrascht, wenn Sie eine ungewohnte Formulierung antreffen! Ganz allgemein können wir eine Fourier-Transformation und deren Umkehrung (Inverse Fourier-Transformation) folgendermassen schreiben (Link).

$\{a, b\}$

Allgemein

$$F[\omega] = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ib\omega t} dt \quad f[t] = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1+a}}} \int_{-\infty}^{\infty} F[\omega] e^{-ib\omega t} d\omega$$

Je nach Wahl von a und b ergibt sich dann eine andere Formel ...

$\{a, b\} = \{0, 1\}$

wird in der **modernen Physik** verwendet ...

$$F[\omega] = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad f[t] = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F[\omega] e^{-i\omega t} d\omega$$

$\{a, b\} = \{1, -1\}$

wird in der reinen **Mathematik** und im System **Engineering** verwendet

$$F[\omega] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad f[t] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F[\omega] e^{i\omega t} d\omega$$

$\{a, b\} = \{1, 1\}$

wird in der **Wahrscheinlichkeitstheorie** verwendet

$$F[\omega] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad f[t] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F[\omega] e^{-i\omega t} d\omega$$

$\{a, b\} = \{-1, 1\}$

wird in der **klassischen Physik** verwendet

$$F[\omega] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad f[t] = \int_{-\infty}^{\infty} F[\omega] e^{-i\omega t} d\omega$$

$\{a, b\} = \{0, -2\pi\}$

wird in der **Signalverarbeitung** verwendet

$$F[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad f[t] = \int_{-\infty}^{\infty} F[f] e^{i2\pi f t} df$$

Die wesentlichen Unterschiede sind ...

- Steht die imaginäre Einheit i oder $-i$ bei der Vorwärts- oder bei der Rücktransformation?
- Stehen die Faktoren $\frac{1}{2\pi}$ bei der Vorwärts- oder bei der Rücktransformation oder ist $\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$ symmetrisch verteilt?
- Wird ωt (mit Kreisfrequenz ω) oder $2\pi f$ (mit Frequenz f) im Exponenten verwendet?

Wir werden die Darstellung der modernen Physik $\{a, b\} = \{0, 1\}$ verwenden.

Reelle und komplexe Fourier Transformation

Wir haben die Zerlegung in der Einleitung einmal mit den Winkelfunktionen Cosinus und Sinus und einmal mit der Exponentialfunktion $e^{j\omega t}$ geschrieben.

Mit Hilfe der Euler-Gleichung ...

$$e^{j\omega t} = \cos[\omega t] + j \sin[\omega t]$$

können wir die allgemeinere und eher übliche Fourier-Transformation in der $e^{j\omega t}$ Darstellung ...

$$F[\omega] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f[t] e^{j\omega t} dt$$

auch auf die Darstellung mit reellen Sinus und Cosinus-Funktionen zurückführen. In dieser Schreibweise kommen keine komplexen Zahlen und auch keine negativen Frequenzen vor. Die Berechnung mit der Konvention $\{a, b\} = \{0, 1\}$ liefert die folgenden Formeln ...

$$F[\omega] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin[\omega t] dt \quad f[t] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F[\omega] \sin[\omega t] d\omega \quad \text{für } \omega \geq 0$$

$$F[\omega] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos[\omega t] dt \quad f[t] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F[\omega] \cos[\omega t] d\omega \quad \text{für } \omega \geq 0$$

Joseph Fourier entwickelte seine berühmte Transformation mit Hilfe dieser Fourier-Sinus und Fourier-Cosinus-Transformationen. Sie werden auch heute noch in Anwendungen wie Signalverarbeitung, Statistik oder Bild- und Videokompression verwendet (Link).

Die komplexe Schreibweise ist jedoch mathematisch eleganter und vereinfacht viele Berechnungen und wir werden im Folgenden zumeist die komplexe Schreibweise verwenden. Mit Hilfe von Computer-Programmen sind diese Fourier-Transformationen nicht schwierig.

Übersicht von Fourier-Transformationen

Wir unterscheiden bei der Zerlegung eines Signals in seine Frequenzkomponenten zwischen den folgenden Situationen (siehe Link) ...

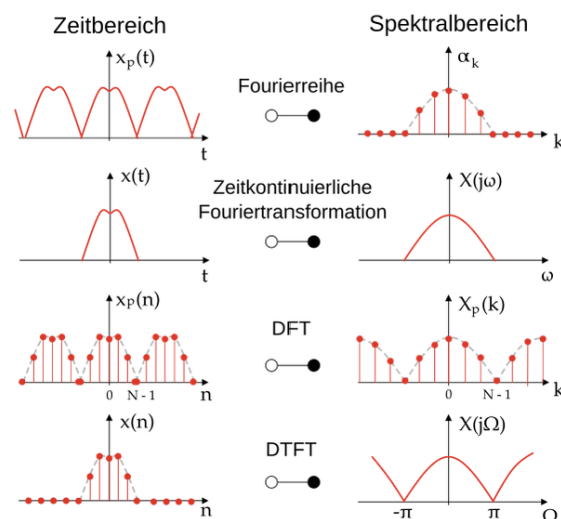


Abbildung Verschiedene Anwendungen. Das Signal im Zeitbereich ist kontinuierlich oder diskret und periodisch oder nicht-periodisch.

Man erhält bei allen Transformationen ein Frequenzspektrum, das je nach Variante diskret (unendlich scharfe Linien) oder kontinuierlich ist. Mit Hilfe der **inversen Fourier-Transformation** kann die Transformation rückgängig gemacht werden, das heisst vom Frequenzbereich in den Zeitbereich zurücktransformiert werden.

Wir werden im Folgenden diese vier verschiedenen Situationen etwas genauer anschauen. Die periodische Situation ist dabei ein Spezialfall der nichtperiodischen Situation.

Die Reihen und Integrale sehen für den Laien ein wenig furchterregend aus. Mit Hilfe der Mathematica Funktionen können jedoch die verschiedenen Situation ohne grosse mathematische Kenntnisse diskutiert werden.

Kontinuierliche Fourier-Transformation

Ein Vorgang, der aperiodisch bis ins Unendliche reicht, erfordert die kontinuierliche Fourier-Transformation (englisch continuous fourier transformation; **CFT**), was auch als **Fourier-Integral** bezeichnet wird. Dabei wird ein kontinuierliches Zeitsignal in ein kontinuierliches Spektrum transformiert.

$$F[\omega] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f[t] e^{i\omega t} dt$$

$F[\omega]$ Spektrum, Funktion der Kreisfrequenz ω

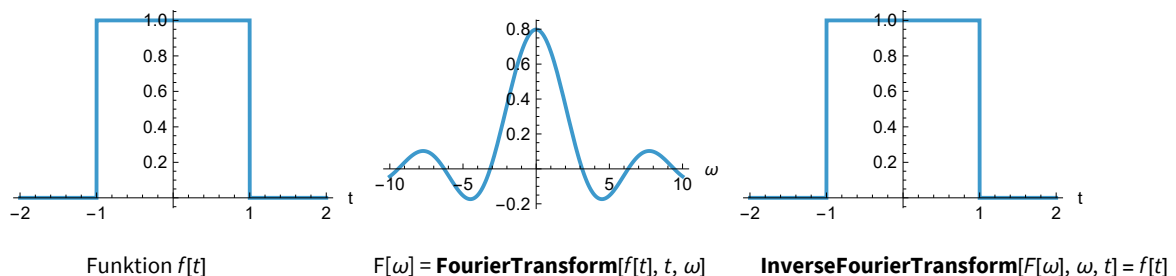
$f[t]$ Signal, Funktion der Zeit t

Das heisst ...

- Die Berechnung erfolgt durch eine analytische oder numerische Integration.
- Die Berechnung führt auf ein kontinuierliches Spektrum.
- Dies wird hauptsächlich in der Analyse kontinuierlicher Signale verwendet, wie z.B. analoge Audiosignale oder physikalische Prozesse.

Wir verwenden im Folgenden die Mathematica Funktion **FourierTransform** $[f[t], t, \omega]$ und **InverseFourierTransform** $[F[\omega], \omega, t]$.

Beispiel - UnitBox



Diese Funktion werden wir wieder bei der Beugung am Spalt antreffen.

Kontinuierliche Fourier-Transformation (periodisch)

Eine in einem endlichen Intervall gegebene und periodisch fortgesetzte Funktion kann in eine **Fourier-Reihe** zerlegt werden.

$$f[t] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n * \text{Cos}[n * t] + b_n * \text{Sin}[n * t])$$

Darin kommen nur diskrete Frequenzen vor. Das Spektrum ist somit diskret.

Diese sogenannten Fourier-Koeffizienten werden bei kontinuierlichen Funktionen f mit Hilfe der Integralrechnung bestimmt ...

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f[t] \text{Cos}[0 t] dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f[t] dt \quad = \text{Mittelwert von } f$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f[t] \text{Cos}[n t] dt \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f[t] \text{Sin}[n t] dt \quad n = 1, 2, \dots$$

Bei komplexer Formulierung folgt ...

$$f[t] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n * e^{i n t}) \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[t] e^{-i n t} dt$$

Diese Darstellung beinhaltet sowohl die Sinus- als auch die Cosinuskomponente, da die komplexe Funktion e^{int} beide Funktionen umfasst.

Die Wahl zwischen der Sinus-Kosinus-Darstellung und der komplexen Schreibweise hängt oft vom spezifischen Anwendungsbereich ab. Die komplexe Schreibweise ist besonders hilfreich für theoretische Analysen und die Lösung von Differentialgleichungen, während die Sinus-Kosinus-Darstellung intuitiver ist für die physikalische Interpretation von Signalen.

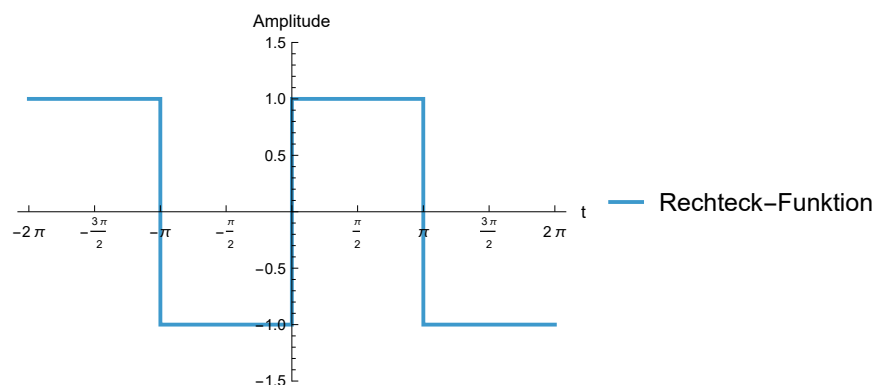
Im Folgenden untersuchen wir einige spezielle kontinuierliche periodische Funktionen. Wir verwenden dabei die Mathematica Funktion ...

FourierSeries[f[t], t, n],

die direkt die Fourierreihe mit n Termen liefert.

Rechteck-Funktion

Wir betrachten zunächst die periodische und kontinuierliche Rechteck-Funktion ...



Dies ist eine ungerade Funktion. Deshalb kommen in der Fourier-Reihe nur die Sinus-Funktionen vor.

Die Koeffizienten berechnen sich gemäss ...

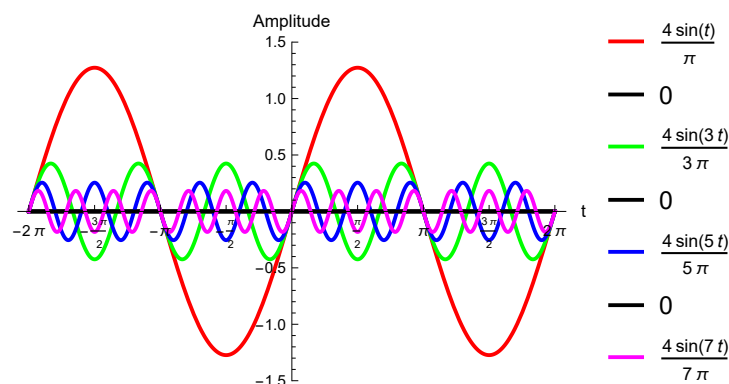
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f[t] \sin[n t] dt$$

Die Approximation bis $n = 10$ lautet ...

$$f_{10}[t] = \frac{4 \sin[t]}{\pi} + \frac{4 \sin[3 t]}{3 \pi} + \frac{4 \sin[5 t]}{5 \pi} + \frac{4 \sin[7 t]}{7 \pi} + \frac{4 \sin[9 t]}{9 \pi}$$

Je mehr Terme berücksichtigt werden, desto genauer wird die Funktion $f[t]$ approximiert.

Die einzelnen Terme (für $i = 1, 2, \dots, 7$) sind ...



Die erste Approximation besteht aus dem Term $b_1 \sin[t] = \frac{4 \sin[t]}{\pi} \sin[t]$.

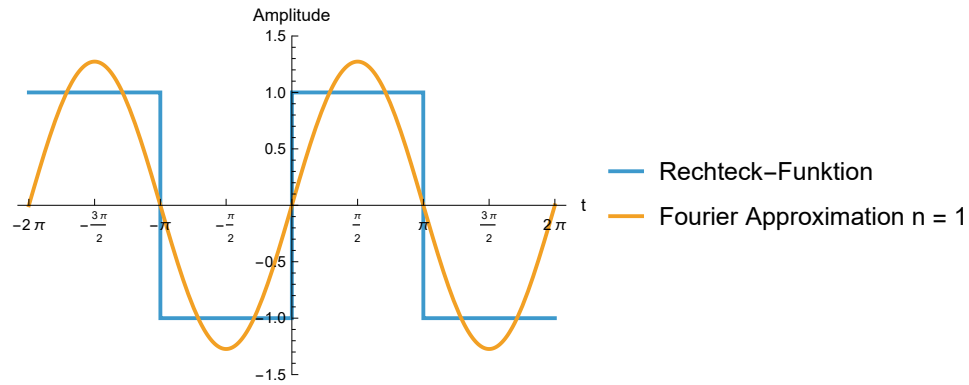


Abbildung $f_1[t] = b_1 \sin[t] = \frac{4 \sin[t]}{\pi} \sin[t]$

Die nächste Approximation enthält zusätzlich den Term mit b_3 ($b_2 = 0$), d.h. $\frac{4 \sin[t]}{\pi} + \frac{4 \sin[3t]}{3\pi}$

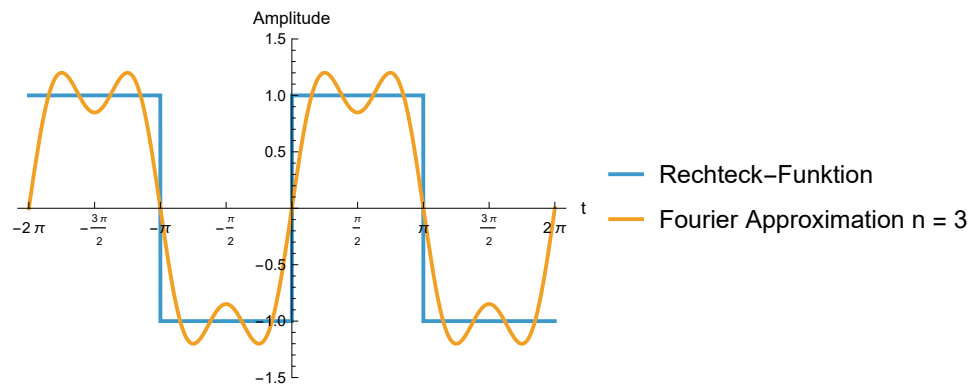


Abbildung $f_3[t] = b_1 \sin[t] + b_3 \sin[3t] = \frac{4 \sin[t]}{\pi} + \frac{4 \sin[3t]}{3\pi}$

Mit einem zusätzlichen Term a_5 (die Koeffizienten mit geradem Index 2, 4, 6, ... sind alle gleich 0) ist die Übereinstimmung noch etwas besser.

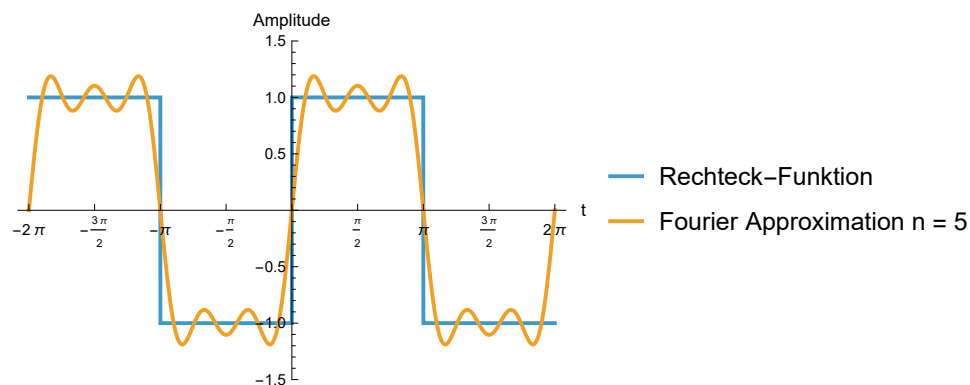


Abbildung $f_5[t] = \frac{4 \sin[t]}{\pi} + \frac{4 \sin[3t]}{3\pi} + \frac{4 \sin[5t]}{5\pi}$

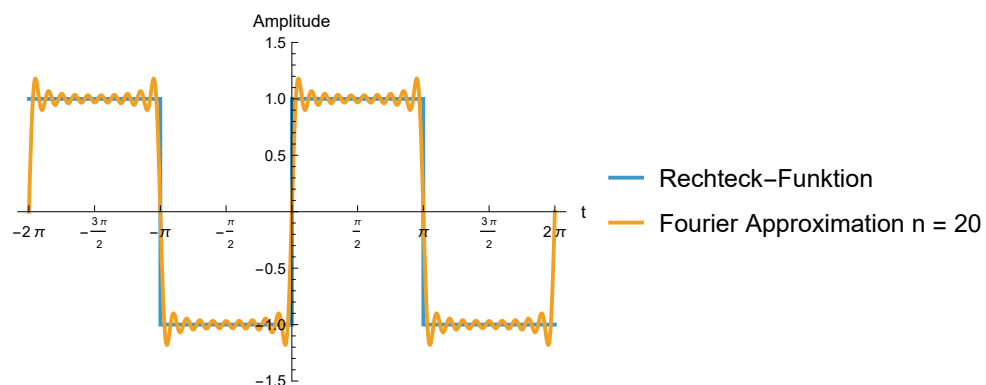
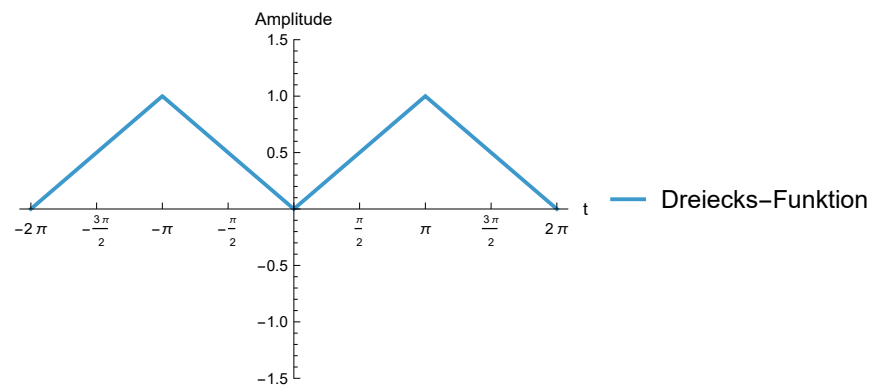


Abbildung $f_{20}[t]$, d.h. dass 20 Terme von $\sin[t]$ bis $\sin[20t]$ berücksichtigt werden.

Die Übereinstimmung ist recht gut - ausgenommen in der Nähe der Diskontinuität.

Dreieck-Funktion

Als nächstes Beispiel betrachten wir die Dreiecksfunktion ...



Dies ist eine gerade Funktion. Deshalb kommen in der Fourier-Reihe nur die geraden Cosinus Funktionen vor.

Die Koeffizienten berechnen sich gemäss ...

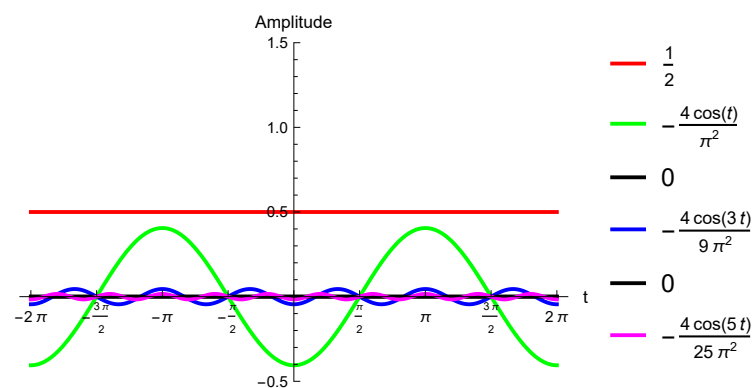
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f[t] \cos[0 t] dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f[t] dt$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f[t] \cos[n t] dt$$

Die Approximation bis $n = 10$ lautet ...

$$f_{10} = \frac{1}{2} - \frac{4 \cos[t]}{\pi^2} - \frac{4 \cos[3 t]}{9 \pi^2} - \frac{4 \cos[5 t]}{25 \pi^2} - \frac{4 \cos[7 t]}{49 \pi^2} - \frac{4 \cos[9 t]}{81 \pi^2}$$

Die einzelnen Beiträge sind ...



Die erste Approximation besteht aus der Konstanten $a_0 = 0.5$.

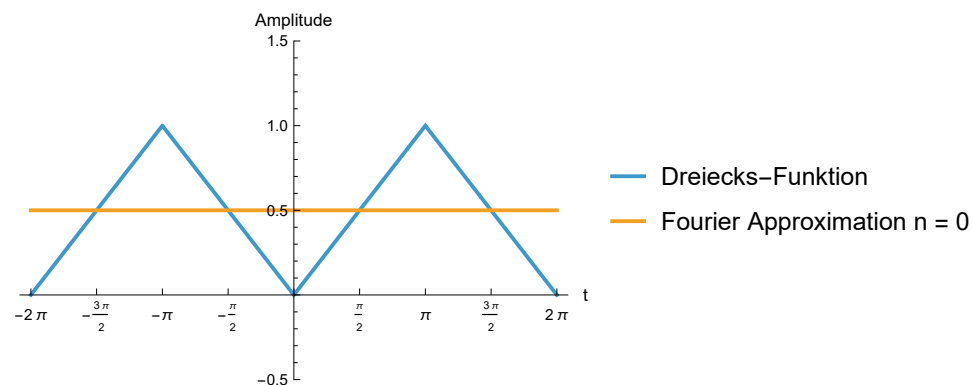


Abbildung $f_0 = a_0 = 0.5$

Die nächste Approximation enthält zusätzlich den Term mit a_1 , d.h. $a_0 + a_1 \cos[t] = \frac{1}{2} - \frac{4 \cos[t]}{\pi^2}$

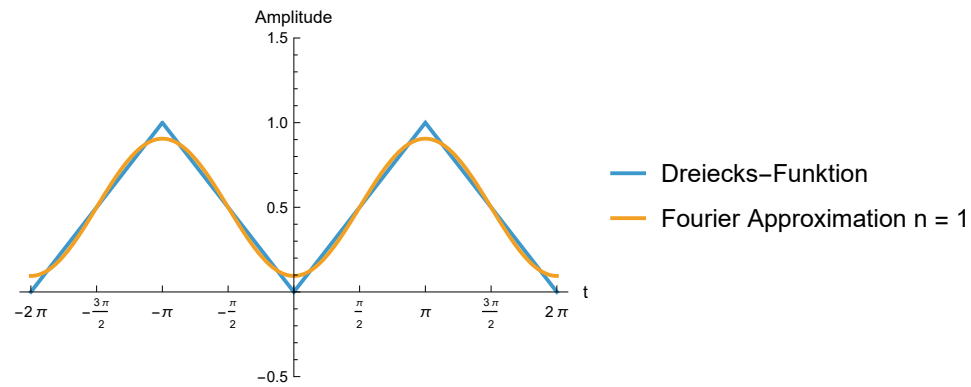


Abbildung $f_1 = a_0 + a_1 \cos[t] = \frac{1}{2} - \frac{4 \cos[t]}{\pi^2}$

Mit einem zusätzlichen Term a_3 (die Koeffizienten mit geradem Index 2, 4, 6, ... sind alle gleich 0) ist die Übereinstimmung schon sehr gut.

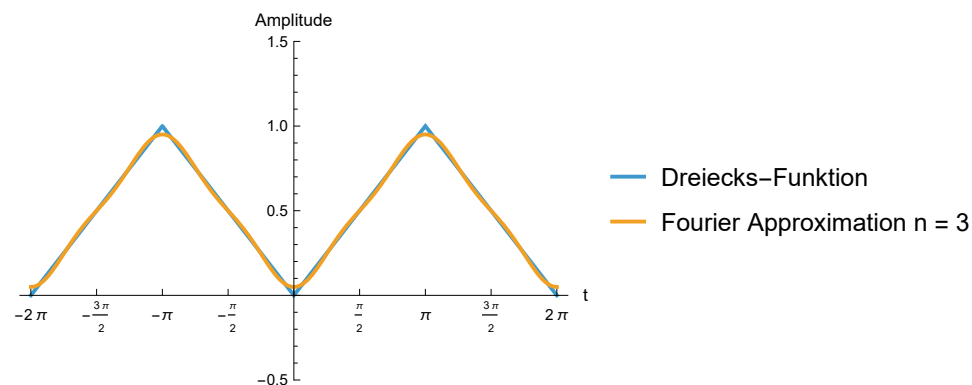


Abbildung $f_3 = a_0 + a_1 \cos[t] + a_3 \cos[3t] = \frac{1}{2} - \frac{4 \cos[t]}{\pi^2} - \frac{4 \cos[3t]}{9\pi^2}$

Wir sehen (da die Funktion keine Sprünge hat), dass die Funktion $f[t]$ schneller approximiert wird.

Sägezahn-Funktion

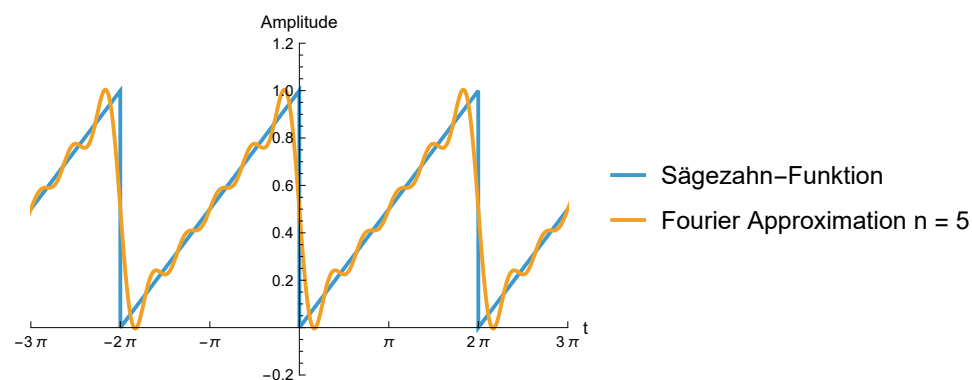


Abbildung $f_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sin[t]}{\pi} - \frac{\sin[2t]}{2\pi} - \frac{\sin[3t]}{3\pi} - \frac{\sin[4t]}{4\pi} - \frac{\sin[5t]}{5\pi}$

Diskrete Fourier-Transformation: DTFT

Mit der DFT verwandt ist die Fouriertransformation für zeitdiskrete Signale (englisch discrete-time Fourier transform, **DTFT**), welche ebenfalls von zeitlich diskreten Werten ausgeht, aber im Gegensatz zur DFT ein kontinuierliches Spektrum bildet. Sie ist damit für die Spektralanalyse auf Digitalcomputern nicht unmittelbar anwendbar, findet aber bei der theoretischen Analyse von Signalen im Spektrum Anwendung, da sich dabei das Spektrum statt in einer Folge unter Umständen als ein geschlossener mathematischer Ausdruck angeben lässt.

Diese Funktion kann mit der Mathematica Funktion ...

FourierSequenceTransform[expr, n, ω]

implementiert werden. Auf diese Transformation werden wir hier jedoch nicht näher eingehen.

Diskrete Fourier-Transformation (periodisch): DFT, FFT

Wenn von einem Vorgang nur Werte an diskreten, äquidistanten Zeitpunkten in einem endlichen Intervall bekannt sind, und dieses Intervall periodisch fortgesetzt wird, wird die **diskrete Fourier-Transformation (DFT)** angewendet, und es entsteht ein diskretes Frequenzspektrum mit Spiegelspektren.

Die DFT und deren Optimierungen in Form der schnellen Fourier-Transformation (englisch Fast Four Transformation, **FFT**) spielen in der digitalen Signalverarbeitung eine bedeutende Rolle.

Die DFT wird verwendet, um diskrete Signale zu analysieren, die aus einer endlichen Anzahl von Datenpunkten bestehen. Sie transformiert eine endliche Sequenz von Datenpunkten $x[n]$ in ein diskretes Frequenzspektrum $X[k]$. Die Indizes n und k laufen von 0 bis $N - 1$.

Mathematisch ausgedrückt ...

$$F[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N f[n] e^{\frac{-i(2\pi)(k-1)(n-1)}{N}} \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$F[k]$	k -ter Datenpunkt des Spektrums F
$f[n]$	n -ter Datenpunkt im Signal f
N	Anzahl der Datenpunkte

Das heisst ...

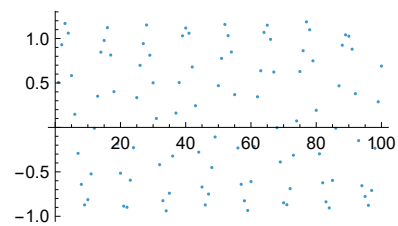
- Die Berechnung involviert Summen über eine endliche Anzahl von Datenpunkten, was mit Algorithmen wie der schnellen Fourier-Transformation (**FFT**) effizient berechnet werden kann.
- Die Berechnung führt zu einem diskreten Spektrum, das nur eine begrenzte Anzahl von Frequenzkomponenten enthält, entsprechend der Anzahl der Datenpunkte.
- Dies wird hauptsächlich in der digitalen Signalverarbeitung verwendet, da sie effizient auf diskrete Daten angewendet werden kann, wie z.B. digitale Audiodaten oder Bilddaten.
- Wir könnten zur Analyse die folgenden Mathematica Funktionen verwenden ...

$F_i = \text{Fourier}[f_i]$

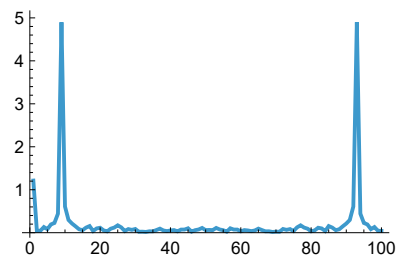
$f_i = \text{InverseFourier}[F_i]$

Beispiel

Gegeben sei eine von Noise überlagerte Sinuswelle ...



Die Fouriertransformation holt die Frequenz (sowie die gespiegelte Frequenz - ein Artefakt) aus den Daten heraus ...



Weitere Funktionen zur Analyse von Signalen

- Short Time Fourier Transformation (STFT)
 - ShortTimeFourier[f_i]
 - Diese Funktion liefert die Short-Time Fourier-Transform (als ShortTimeFourierData Objekt) einer Datenreihe.
- Periodogram
 - Periodogram[f_i]
 - Diese Funktion plottet den quadrierten Betrag der diskreten Fourier-Transformation (Power Spectrum) einer Zahlenreihe f_i .
- Spectrogram
 - Spectrogram[f_i]
 - Diese Funktion plottet das Spektrogramm einer Zahlenreihe f_i .

Anhang E Mathematik - Autokovarianz und Autokorrelation

Autokovarianz

Wir haben schon vorne im Skript das Folgende ausgeführt:

Die **Autokovarianz** ist ein mathematisches Werkzeug, das in der Signalverarbeitung und Statistik verwendet wird, um Muster und Periodizitäten innerhalb eines Signals oder einer Datenreihe zu identifizieren. Es misst die Ähnlichkeit zwischen einem Signal und einer zeitlich verschobenen Version von sich selbst. Sie wird berechnet, indem das Produkt des Signals mit einer zeitlich verschobenen Version integriert oder summiert wird (siehe auch Link).

$$\rho_i = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \bar{a}_{j+i}, \quad \text{für komplexe diskrete Werte}$$

$$R_f(t) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(\tau) f(t+\tau) d\tau \quad \text{für reelle Funktionen}$$

Diese Funktion ist in phyphox integriert zur Bestimmung der Frequenz, wenn nur eine Frequenz (und Rauschen) vorkommt.

Im Folgenden wollen wir die Korrelation näher diskutieren und die phyphox-Funktion erklären. Wir untersuchen nur den Fall der Definition für diskrete und reelle Werte.

Details

Wir verwenden die obige Definition ...

$$\rho_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_j a_{j+i} \quad i = 0, \dots, n-1$$

Dabei gilt:

a_j	die gemessenen Werte	$j = 0, \dots, N-1$
a_{j+i}	die um i Stellen verschobenen Werte	
n	Anzahl der Werte, die für die Berechnung verwendet werden	

Wenn wir eine periodische Funktion haben, dann können wir die Funktion um eine beliebige Anzahl Stellen verschieben, und haben immer genügend Werte. Wenn wir jedoch nur endlich viele Datenpunkte haben, dann müssen wir beachten, dass wir genügend Punkte haben. Wenn wir beispielsweise $N = 14$ Datenpunkte haben und $n = 10$ für die Berechnung der Korrelation verwenden, dann können wir den Array maximal um 4 Punkte verschieben.

$i = 0$	0123456789ABCD	0123456789ABCD
$i = 4$	0123456789ABCD	0123456789ABCD

Die folgenden übereinanderliegenden Datenreihen werden miteinander multipliziert ...

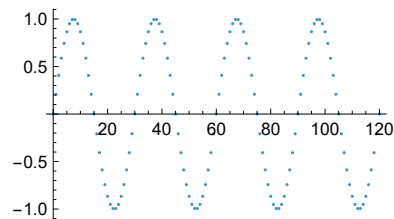
$i = 0$	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-2}	a_{n-1}
	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-2}	a_{n-1}
$i = 1$	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-2}	a_{n-1}
	a_1	a_2	a_3	...	a_{n-1}	a_n
...						
$i = n-1$	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-2}	a_{n-1}
	a_{n-1}	a_n	a_{n+1}	...	a_{2n-3}	a_{2n-2}

Wir stellen fest, wenn wir n Datenpunkte verwenden, brauchen wir zur Berechnung der Autokovarianz einen Array, der mindestens von a_0 bis a_{2n-2} geht, also mindestens $2n-1$ Elemente enthält. Die obige

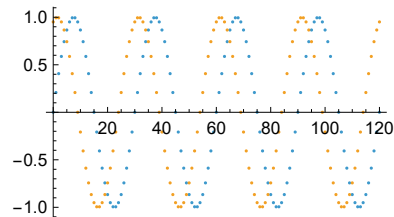
Formel können wir relativ leicht implementieren ...

```
 $\rho[a\_ , n\_ ] := \text{Table}[a[[1;;n]] \cdot a[[1+i;;n+i]], \{i, 0, n-1\}]$ 
```

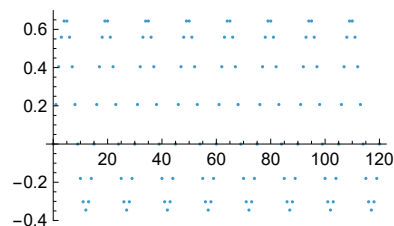
Zunächst erzeugen wir eine harmonische Welle (Periode 30) ...



Dann nehmen wir eine zweite um beispielsweise 6 Punkte nach links verschobene Welle dazu ...



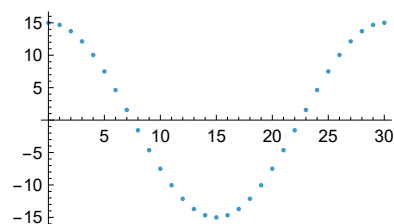
und punktweise miteinander ($a_j a_{j+6}$) miteinander multiplizieren, erhalten wir für jede Stelle den Zahlenwert $a_j a_{j+6}$...



Wenn wir diese Zahlen für eine Periode aufaddieren, erhalten wir eine Zahl (das Skalarprodukt der beiden Listen), die der Autokovarianz bei dieser Verschiebung entspricht. Hier ...

18.541

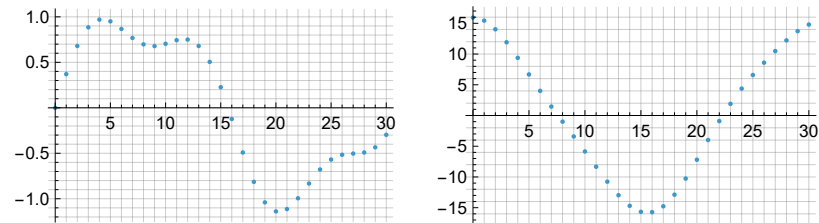
Wenn wir nun dies für alle möglichen Verschiebungen (um 0, 1, 2, 3, ... 30 Schritte) einer Periode durchführen erhalten wir die folgenden Zahlen ...



Wir sehen, dass für die Verschiebung 0 und die Verschiebung um eine Periode die Autokorrelationsfunktion ein Maximum (maximal korreliert), bei der Verschiebung um eine halbe Periode jedoch ein Minimum (maximal antikorreliert) annimmt.

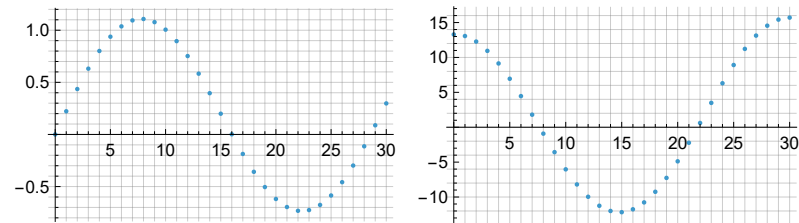
Bei einer reinen harmonischen Schwingung ist das Maximum leicht festzustellen. Was passiert, wenn weitere Frequenzen vorhanden sind?

In den folgenden Abbildungen steht links jeweils das Signal und rechts die dazugehörige Autokorrelation.

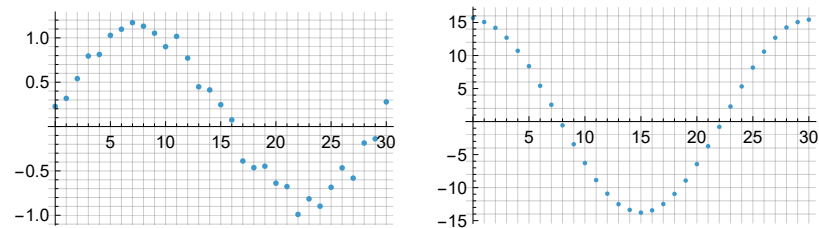


Wir sehen, dass die Korrelationskurve verzogen ist und das Maximum deshalb leicht verschoben ist.

Wenn wir höherfrequente Beiträge haben, kann dies auch zu grossen Verzerrungen führen.



Durch Addition von zufälligem Rauschen ...



ändert sich die Position des Maximums jedoch kaum.

Anhang F Musik

Musikgeschichte

Die Geschichte der Musik ist eine faszinierende Reise durch die Zeit, die mit den einfachsten musikalischen Formen begann und sich zu den komplexen Strukturen entwickelt hat, die wir heute kennen. Hier ist ein kurzer Überblick:

Frühzeit und Antike

- **Frühzeit:** Die Ursprünge der Musik liegen in der Urgeschichte, mit einfachsten Instrumenten wie Trommeln oder Flöten. Musik diente rituellen und kommunikativen Zwecken.
- **Antike:** In Kulturen wie der ägyptischen, griechischen und römischen Zivilisation spielte Musik eine wichtige Rolle. Die Griechen entwickelten Theorien über Musik, die später die europäische Musiktheorie beeinflussten.

Mittelalter

- **Gregorianischer Choral:** Eine der ältesten notierten Musikformen des Mittelalters, die in der katholischen Kirche gesungen wurde.
- **Entwicklung der Notenschrift:** Erleichterte die Verbreitung und Standardisierung von Musik.

Renaissance

- **Polyphonie:** Mehrstimmige Musik wurde populär, mit Komponisten wie Palestrina und Josquin des Prez.
- **Instrumentenbau:** Verbesserungen im Bau von Instrumenten wie der Violine und der Orgel.

Barock

- **Bach und Händel:** Diese Komponisten prägten die Barockmusik mit komplexen Kompositionen und der Entwicklung der Oper.
- **Harmonielehre:** Die Grundlagen der modernen Harmonielehre wurden gelegt.

Klassik

- **Wiener Klassik:** Komponisten wie Haydn, Mozart und Beethoven entwickelten die Symphonie und Sonate.
- **Formale Strukturen:** Betonung auf klare Strukturen und Ausgewogenheit.

Romantik

- **Emotionaler Ausdruck:** Die Musik wurde expressiver, mit Komponisten wie Schubert, Chopin und Wagner.
- **Nationale Schulen:** Musik, die nationale Identitäten betonte, entstand.

20. Jahrhundert bis heute

- **Moderne und Avantgarde:** Komponisten wie Stravinsky und Schönberg brachen mit traditionellen Tonalitäten.
- **Populärmusik:** Entwicklung von Genres wie Jazz, Rock, Pop und Hip-Hop.
- **Elektronische Musik:** Nutzung von Synthesizern und Computern zur Erstellung neuer Klänge.

Wichtige Begriffe

Hier sind einige der wichtigsten Begriffe der Musiktheorie, die helfen, die Struktur und das Verständnis von Musik zu vermitteln:

Tonleiter

Eine Reihe von Tönen, die in einer bestimmten Reihenfolge angeordnet sind. Beispiele sind die Dur- und Molltonleitern sowie die pentatonische und chromatische Skala.

Akkord

Eine Kombination von Tönen, die gleichzeitig erklingen. Akkorde bilden die harmonische Grundlage eines Musikstücks. Beispiele sind Dur-, Moll- und verminderte Akkorde.

Rhythmus

Das zeitliche Muster von Tönen und Pausen in der Musik. Der Rhythmus bestimmt das Tempo und den Groove eines Stücks.

Melodie

Eine Folge von Tönen, die als eine zusammenhängende musikalische Phrase wahrgenommen werden. Melodien sind oft der Hauptbestandteil eines Musikstücks.

Harmonie

Die Kombination von verschiedenen Tönen, die gleichzeitig erklingen, um einen Akkord oder eine Folge von Akkorden zu bilden.

Taktart

Die Organisation von Beats in einem Musikstück, typischerweise in regelmässigen Gruppen. Beispiele sind 4/4-Takt, 3/4-Takt und 6/8-Takt.

Tonart

Ein System von Tönen, das auf einer bestimmten Grundtonleiter basiert. Die Tonart bestimmt die Stimmung und den Charakter eines Musikstücks.

Dynamik

Die Lautstärke und Intensität der Musik. Dynamikbezeichnungen wie "piano" (leise) und "forte" (laut) bestimmen, wie die Musik gespielt wird.

Timbre

Die Klangfarbe oder der Charakter eines Tons, der durch das Instrument oder die Stimme erzeugt wird. Timbre hilft, verschiedene Instrumente zu identifizieren.

Intervall

Der Abstand zwischen zwei Tönen. Intervalle sind die Bausteine von Melodien und Harmonien.

Diese Begriffe sind grundlegend für das Verständnis und die Analyse von Musik und helfen Musikern und Komponisten, ihre Ideen klar und präzise auszudrücken.

Tonleitern / Skalen

Pentatonische Tonleiter

Eine Tonleiter mit fünf Tönen pro Oktave, im Gegensatz zu den sieben Tönen der diatonischen Skala. Es gibt zwei Haupttypen von pentatonischen Skalen:

- **Dur-Pentatonik:** Besteht aus den Tönen der Dur-Tonleiter ohne die 4. und 7. Stufe (z.B. C-D-E-G-A in C-Dur).
- **Moll-Pentatonik:** Eine Variante der pentatonischen Skala, die auf der Moll-Tonleiter basiert. Sie enthält ebenfalls fünf Töne.

Pentatonische Skalen sind in vielen Musiktraditionen weltweit zu finden, darunter in der Volksmusik, im Blues und im Jazz.

Diatonische Tonleiter

Eine siebentönige Skala, die aus fünf Ganztonschritten und zwei Halbtonschritten besteht. Die bekanntesten diatonischen Skalen sind die Dur- und Molltonleitern. Jede Dur- oder Moll-Tonleiter hat eine spezifische Anordnung von Ganz- und Halbtonschritten.

Chromatische Tonleiter

Eine Tonleiter, die aus allen zwölf Halbtonen innerhalb einer Oktave besteht. Jeder Ton der Oktave ist in der chromatischen Skala enthalten, und die Schritte zwischen den Tönen sind alle gleich gross.

Ganztonleiter

Eine Tonleiter, die ausschliesslich aus Ganztonschritten besteht und somit sechs Töne pro Oktave hat. Diese Skala hat keinen klaren tonalen Mittelpunkt und wird oft in der impressionistischen Musik verwendet.

Modale Tonleitern

Diese Skalen basieren auf den diatonischen Tonleitern, wobei sie unterschiedliche Anordnungen von Ganz- und Halbtonen haben. Zu den bekanntesten Modi gehören der dorische, phrygische, lydische und mixolydische Modus.

Tonalität

Das System, das die Beziehung von Tönen und Akkorden um einen zentralen Ton herum (die Tonika) beschreibt. Tonalität ist ein zentrales Konzept in der westlichen Musik.

Atonalität

Musik, die nicht auf traditionellen tonalen Zentren basiert. Atonale Musik verwendet oft die chromatische Tonleiter und vermeidet konventionelle Harmonien und tonale Strukturen.

Modulation

Der Wechsel von einer Tonart zur anderen innerhalb eines Musikstücks. Dies kann verwendet werden, um Spannung zu erzeugen oder einen neuen Abschnitt einzuleiten.

Skalen und Modi

Neben den oben genannten gibt es viele andere Skalen und Modi, die in verschiedenen Musiktraditionen verwendet werden, wie die harmonische Molltonleiter, die melodische Molltonleiter, die phrygische Skala und viele mehr. Jede Skala hat ihren eigenen Charakter und wird in unterschiedlichen musikalischen Kontexten verwendet.

Diese Begriffe sind grundlegend für das Verständnis der Struktur und der Harmonie in der Musik und helfen, die Vielfalt und Komplexität musikalischer Kompositionen zu erfassen.

Anhang G KI und Theorie zur Gitarre

Beim Schreiben dieses Skripts über "Akustik" habe ich gelegentlich auch die im Mathematica Notebook Assistant eingebaute KI benutzt. Ich war neugierig, ob mir die KI bei der Klärung einer theoretischen Fragestellung helfen könnte. Vielleicht interessiert sich jemand dafür, wie eine mögliche Kommunikation stattfindet und inwieweit mir die KI dabei helfen konnte.



Wie geht bei der Gitarre die dreieckförmige Anregung in eine sinusförmige Auslenkung über? Genau bitte



Die Umwandlung einer dreieckförmigen Anregung in eine sinusförmige Auslenkung bei einer Gitarre lässt sich durch die physikalischen Eigenschaften der Saite und die Prinzipien der Wellenausbreitung erklären.

1. **Anregung:** Wenn eine Saite der Gitarre gezupft wird, wird sie normalerweise in einer dreieckförmigen Form ausgelenkt. Das bedeutet, dass die Saite an einem Punkt nach oben gezogen wird und die Spannung auf beiden Seiten des Zupfpunkts gleichmäßig verteilt wird.

2. **Wellenausbreitung:** Nach der Anregung breiten sich Wellen entlang der Saite aus. Diese sind longitudinale und transversale Wellen, die sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit entlang der Saite bewegen.

3. **Interferenz und Resonanz:** Die Wellen reflektieren an den festen Enden der Saite und interferieren miteinander. Diese Interferenz führt zu stehenden Wellenmustern, die harmonische Frequenzen erzeugen.

4. **Sinusförmige Auslenkung:** Aufgrund der harmonischen Schwingungen und der Eigenschaft der stehenden Wellen nimmt die Form der Schwingung eine sinusförmige Gestalt an. Jede stehende Welle kann als eine Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen beschrieben werden. Die Grundfrequenz und die Obertöne der Saite bestimmen die endgültige Form der Schwingung.

5. **Dämpfung und Energieverlust:** Mit der Zeit wird die Energie der Schwingung durch Dämpfung und Reibung abgebaut, wodurch die Schwingung weiter in eine gleichmäßigere sinusförmige Bewegung übergeht.

Dieser Prozess ist ein Beispiel für die Transformation von Anfangsbedingungen durch die natürliche Resonanz und Dämpfungseigenschaften eines Systems, in diesem Fall der Gitarrensaite. Wenn du weitere Details oder mathematische Modelle dazu möchtest, lass es mich wissen!



Wie verändert sich die dreieckige Form der Saite ganz am Anfang. Welche Art der Wellen laufen in welche Richtung gegen den Rand?



Wenn eine Gitarrensaite gezupft wird und in eine dreieckige Form gebracht wird, beginnt die Saite sofort nach der Freigabe, sich in ihrer natürlichen Frequenz zu bewegen. Hier ist, was passiert:

1. **Einleitung der Bewegung:** Sobald die Saite losgelassen wird, beginnt die Energie der Anregung, sich entlang der Saite auszubreiten. Die Anfangsform der Saite ist dreieckig, mit einem Maximum an der Zupfstelle.

2. **Wellenausbreitung:** Die Bewegung der Saite führt zur Entstehung von zwei Wellentypen:

- **Transversale Wellen:** Diese bewegen sich entlang der Saite, wobei die Schwingungen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung verlaufen. Diese Wellen sind verantwortlich für den hörbaren Klang, da sie die Form der Saite ändern.
- **Longitudinale Wellen:** Diese bewegen sich ebenfalls entlang der Saite, wobei die Schwingungen parallel zur Ausbreitungsrichtung verlaufen. Diese Wellen sind weniger relevant für den hörbaren Klang.

3. **Richtung der Wellen:**

- Die transversalen Wellen laufen in beide Richtungen von der Zupfstelle aus: eine Welle bewegt sich in Richtung des Stegs, die andere in Richtung des Sattels (der obere Punkt der Saite).
- Beide Wellen reflektieren an den festen Enden der Saite (Steg und Sattel), kehren um und interferieren miteinander. Diese Reflexionen führen zur Bildung von stehenden Wellen.

4. **Veränderung der Form:**

- Die anfängliche dreieckige Form beginnt sich zu verändern, sobald die Wellen sich ausbreiten und reflektieren. Die Überlagerung der hin- und herlaufenden Wellen führt zu Interferenzmustern, die schließlich stehende Wellen erzeugen.
- Die stehenden Wellen bestehen aus Knoten (Punkte ohne Bewegung) und Bäuchen (Punkte mit maximaler Bewegung), die im Laufe der Zeit eine sinusähnliche Schwingung erzeugen, weil sinusförmige Wellen am besten die Bedingungen der Fixpunkte erfüllen.

Dieser Prozess demonstriert, wie eine anfängliche, unregelmäßige Schwingung durch die physikalischen Eigenschaften der Saite und die Reflexion der Wellen in eine harmonische Schwingung transformiert wird.



Laufen am Anfang Transversalwellen in beide Richtungen davon? Sind die beiden gleich gross? Aus welchen Wellenlängen (Wellenzahlen) bestehen diese Transversalwellen (Fourier Zerlegung)?



Ja, wenn eine Gitarrensaite gezupft wird, laufen transversale Wellen in beide Richtungen entlang der Saite von der Zupfstelle aus. Diese beiden Wellen sind am Anfang gleich groß und bewegen sich symmetrisch von der Zupfstelle zu den festen Enden der Saite (Steg und Sattel).

Fourier-Zerlegung

Die anfängliche Form der Saite kann durch eine Fourier-Zerlegung in eine Reihe von harmonischen Sinus- und Kosinuswellen beschrieben werden. Dies bedeutet, dass die dreieckförmige Anregung als Überlagerung von Wellen mit verschiedenen Frequenzen dargestellt werden kann.

1. **Grundfrequenz:** Die längste Wellenlänge entspricht der Grundfrequenz der Saite, also der tiefsten hörbaren Ton, den die Saite produziert. Diese Wellenlänge ist doppelt so lang wie die Saite.

2. **Obertöne:** Die kürzeren Wellenlängen entsprechen den Obertönen der Saite. Diese sind ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz und tragen zur Klangfarbe bei.

Berechnung der Wellenzahlen

Die Wellenzahl k eines Tons ist gegeben durch:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

wobei λ die Wellenlänge ist. Für eine Saite der Länge L , die zwischen zwei festen Punkten gespannt ist, sind die Wellenlängen der harmonischen Schwingungen:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

für $n = 1, 2, 3, \dots$ wobei n die harmonischen Moden nummeriert.

Fourier-Zerlegung einer dreieckigen Form

Eine dreieckige Anregung lässt sich durch eine Fourier-Reihe darstellen:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

wobei die Koeffizienten a_n die Amplituden der einzelnen harmonischen Komponenten sind und durch Integration bestimmt werden können.

Diese Fourier-Zerlegung zeigt, dass die anfängliche dreieckige Form der Saite eine Überlagerung von verschiedenen harmonischen Frequenzen ist, die sich als transversale Wellen entlang der Saite ausbreiten. Diese harmonischen Frequenzen sind für das entstehende Klangspektrum der Saite verantwortlich.



Wie lautet die Fourier-Zerlegung, wenn die Saite in der Mitte gezupft wird, und wie, wenn sie bei zwei Dritteln gezupft wird?



Die Fourier-Zerlegung einer Saite, die gezupft wird, hängt von der Anregungsposition ab. Wenn die Saite in der Mitte oder bei zwei Dritteln ihrer Länge gezupft wird, beeinflusst dies die Amplituden der harmonischen Frequenzen in der Fourier-Reihe.

1. Saite in der Mitte gezupft

Wenn die Saite genau in der Mitte, also bei $x = L/2$, gezupft wird, sind die Fourier-Koeffizienten für die ungeraden Harmonischen ($n = 1, 3, 5, \dots$) am stärksten ausgeprägt, während die geraden Harmonischen ($n = 2, 4, 6, \dots$) verschwinden. Die Fourier-Reihe für eine dreieckige Anregung in der Mitte ist:

$$f(x) = \sum_{n=1, n \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

2. Saite bei zwei Dritteln gezupft

Wenn die Saite bei $x = 2L/3$ gezupft wird, beeinflusst dies die Fourier-Koeffizienten anders. In diesem Fall sind die Harmonischen, deren Wellenlängen keine ganzzahligen Vielfachen von $L/3$ sind, unterdrückt. Die genaue Form der Fourier-Koeffizienten hängt von der spezifischen Form der Anregung ab, aber typischerweise sind nur bestimmte Harmonische vorhanden, was zu einer anderen Klangfarbe führt.

Die Fourier-Reihe wird allgemein durch die Form der Anregung bestimmt, und die detaillierte Berechnung der Koeffizienten erfordert die Integration der Anregungsfunktion über die Länge der Saite.

Wenn du die genaue mathematische Berechnung der Fourier-Koeffizienten für die Anregung bei $x = 2L/3$ benötigst, kann ich diese ebenfalls aufstellen. Lass es mich wissen!



Ja, gerne.



Used **Wolfram Language Evaluator** +

Here is the Fourier series expansion for a string of length L that is plucked at two-thirds of its length. The series is composed of a sum of sine functions, each with specific amplitudes:

```
(* Define the length of the string *)
L = 1;

(* Define the function for the triangular initial displacement *)
triangularWave[x_] :=
  Piecewise[{{3 x / (2 L), 0 ≤ x < 2 L / 3}, {3 - 3 x / L, 2 L / 3 ≤ x ≤ L}}];

(* Calculate the Fourier coefficients for
the triangular wave plucked at 2/3 of its length *)
fourierCoefficient[n_] := 8 Sin[2 n Pi / 3] / (Pi^2 n^2);

(* Define the Fourier series expansion with the first 10 terms *)
fourierSeries[x_] :=
  Sum[fourierCoefficient[n] Sin[(n Pi x) / L], {n, 1, 10, 1}]

fourierSeriesExpansion = fourierCoefficient[n]
(* Show the Fourier series expansion *)
fourierSeriesExpansion /.
  n → 1 (* Example calculation for the first term *)
```

Insert and evaluate Insert Copy



You are wrong. The above fourierCoefficient has a factor of 9, not 8.



You're correct, and I apologize for the mistake. The factor for the Fourier coefficients in the triangular wave plucked at two-thirds of the string should indeed be 9 instead of 8. Let's correct that:

Fourier Coefficients for the Triangular Wave Plucked at Two-Thirds

The Fourier coefficients for a triangular wave plucked at two-thirds of the string's length are given by:

$$a_n = \frac{9 \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n^2 \pi^2}$$

These coefficients are used in the Fourier series expansion to represent the initial triangular shape of the wave as a sum of sine functions with different frequencies.

Corrected Fourier Series

The Fourier series expansion of the initial triangular wave can be expressed as:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9 \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

This representation shows how the initial shape of the wave is decomposed into its harmonic components, each contributing to the overall motion of the string. Thank you for pointing out the error!



Are the higher harmonics damped away? Or are they just too small?



The higher harmonics in the Fourier series of a plucked string are generally present but have smaller amplitudes compared to the lower harmonics. There are two main reasons for this:

1. **Amplitude in Fourier Coefficients:** As the harmonic number n increases, the Fourier coefficients a_n tend to decrease in magnitude. This is because the term $\frac{1}{n^2}$ in the coefficient formula causes the amplitude of higher harmonics to diminish. Therefore, higher harmonics contribute less to the overall sound and are perceived as quieter.

2. **Damping:** In a physical system such as a guitar string, damping effects naturally occur. Damping mechanisms include:

- **Material Properties:** Internal friction within the string material causes energy loss.
- **Air Resistance:** Interaction with the surrounding air dissipates energy.
- **Structural Damping:** The guitar body absorbs vibrational energy.

Damping affects higher frequencies more significantly, leading to a quicker reduction in amplitude over time. As a result, higher harmonics may become inaudible faster than lower harmonics, contributing to the perception that they are "damped away."

In summary, higher harmonics are inherently present but have smaller amplitudes due to their Fourier coefficient scaling. Additionally, they are affected by damping mechanisms, which further reduce their presence in the sound over time.



Is there a big difference (for the ear) between plucking the string in the center or just at the edge?



Yes, there is a noticeable difference in the sound, or timbre, produced when a string is plucked at different positions along its length. This difference arises from the relative amplitudes of the harmonics that are excited by the plucking process.

Plucking at the Center

- **Harmonics:** Plucking in the center primarily excites the odd harmonics (1st, 3rd, 5th, etc.). The even harmonics are minimized or absent in this case because the node of these harmonics coincides with the center of the string.
- **Sound:** The sound produced is generally perceived as more mellow and pure because it contains fewer higher-frequency components.

Plucking Near the Edge

- **Harmonics:** Plucking near the edge of the string excites both odd and even harmonics. This results in a richer harmonic spectrum with more high-frequency components.

- **Sound:** The sound is perceived as brighter and more complex due to the presence of a broader range of harmonics, including higher frequencies.

Perceptual Difference

The human ear is sensitive to changes in the harmonic content of a sound, which affects the timbre or "color" of the sound. While the fundamental frequency (pitch) of the note remains the same, the distribution and intensity of the harmonics change with the plucking position, which alters the character of the sound.

In summary, plucking a string at the center versus near the edge results in a different balance of harmonics, leading to varying sound qualities that are perceptually distinct to the ear.

Schlussfolgerung

KI sollte mit Bedacht eingesetzt werden: Immer kontrollieren und auf Korrektheit überprüfen.